1. Regio Monte Joannes = De triangulis omni modis Accesserunt, tractatus de quadratura circuli a Nicolai Cusani = Norimbergae = Petrei = 1533

3 Orontius Fineus = De quadratura circuli, de Circuli mensura, de multarum rerum ac inveniunda longitudinis locorum differentia & et Planisphaerio Geographicum = Lut. Parisiorum = 1544

4 Averrois = Libellus de Substantia orbis, tit. Joan. B. Confalonerius.
Confalonerius Joan. B. = Opuscula de Materia prima, de forma caeli, de Voluntate ac libero arbitrio de providentia et de [illegible] = Veneti = 1525.

~~4 [illegible]~~

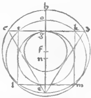
5 [illegible] ... Parisiis [illegible] 1548

DOCTISSIMI VIRI ET MATHEmaticarum disciplinarum eximij professoris

IOANNIS DE REGIO MONTE DE TRIANGVLIS OMNIMODIS LIBRI QVINQVE:

Quibus explicantur res necessariæ cognitu, uolentibus ad scientiarum Astronomicarum perfectionem deuenire: quæ cum nusquã alibi hoc tempore expositæ habeantur, frustra sine harum instructione ad illam quisquam aspirarit.

Accesserunt huc in calce pleraq; D. Nicolai Cusani de Quadratura circuli, Deq; recti ac curui commensuratione: itemq; Io. de monte Regio eadem de re ἐλεγκτικά, hactenus à nemine publicata.



Omnia recens in lucem edita, fide & diligentia singulari. Norimbergæ in ædibus Io. Petrei.

ANNO CHRISTI

M. D. XXXIII.

IOANNES SCHONERUS CAROLOSTADIUS AMPLISS. SENAtorum Ordini ciuitatis Noricæ Dominis prudentiss. S. P. D.

VTINAM prudentissimi Domini, ita Deo uisum fuisset, ut qua
occasione nunc ego sum usus ad celebrandam rempubl. uestrã,
dum uobis optimis scriptis doctissimi hominis Iohannis de Re-
gio monte dedicandũ putaui, ea autor ipse in uestra florentiss.
urbe excudendo cum hoc tum alia plurima ad illius immorta-
lem gloriam uti potuisset: Nimirum ut absolutius hoc opus in
lucem exiret, ita maiorem famã excitaret ciuitatis uestræ. Sed
quia hanc non solum in ista parte nobis felicitatem, sed innumerabilibus alijs, sua
illa morte abstulit, faciendum scilicet quod conceditur, quando id quod uolumus
non licet: Hoc est conandum ut quantumcunq; quidem & qualecunq; illius uiri
in manus nostras peruenerit, communicetur studiosorum utilitati. Nihil est illo-
enim quamuis imperfectum atq; inornatum aut etiam disiectum, quod non ma-
ximi pendi debere uideatur. Optandum certe, ut quia Regiomontanum ab offici-
na, unde tot egregia opera emitterentur, quot indice præmisso indicauerat, in Ita-
liam retraxerat uocatio, honestiss. ea quidem, sed cui obsecutus reuerteretur nun-
quam, ab eo relicta saltem monumenta cum ipsius tum aliorum ueterum potissi-
mum laborum, conseruarentur: Sed hæc ipsa quædam ita uastauit calamitas, ut
ex tanta tam'q; splendida copia, qualem indices ostendunt, perpauculæ reliquiæ
ad nos peruenerint. Quarum ipsarum non absq; præcipua utilitate sua & habent
à nobis nonnihil studiosi, &, si Deus successum aspirant conatibus meis, habituri
sunt. Hunc autem librum, cui de Triangulis omnimodis ipse autor titulũ in-
didit, clarissimus ordinis uestri uir Bilibaldus Pircamerus, illo tempore, quo tam
speciosa suppellex Regiomontani parum diligenter conseruabatur, cum, ut sæpe
dicere audiuimus, magna pecunia comparasset, non tam sibi quàm studiosis disci-
plinarum Mathematicarum: Hunc igitur ipsum librum, uisum Deo fuisset, ut ab
eo, quem dixi clariss. uiro Bilibaldo Pircamero in lucem æderetur: quem ut uirtu-
te & sapientia, ita literis quoq; & doctrina fuisse instructissimum scimus, de quo
in præsentia neq; res fert, ut multum uerborum faciamus, neq; ipsius uirtutis ac
eruditionis magnitudo paucis potest esse contenta, quem in uita, ut dilexerant, ue-
nerati'q; fuerant docti omnes, sic nunc ea defunctum deplorant atq; lugent. Ma-
gnum hoc illi tribuentes ac certiss. testimonium iudicij sui, cui in epistolæ breuita-
te quis etiam præstans eloquentia nedum infacundus ego satisfacturum se speret?
Redeo igitur ad propositum. Ergo etiam hanc comoditatem præcidit siue
Deus siue fortuna, satius esse iudicauimus, etsi minus pulcram, optimã tamẽ per
se mercem contingere studiosis expositione nostra, quàm ut retenta omnino ea care-
rent. Et est primus sanè liber ad eum modũ ab autore perculus, ut neq; ipso eden-
te melius habiturus fuerit. Reliquis extrema manus & limæ labor non accessit, nã
numeros præcedentium propositionum, quibus sequentia probabat, seu sanè uel
nulla potius legentium iactura festinabundus passim ascribere neglexit, in qui-
bus neq; nos uoluimus ingenium industriam'q; nostram ostentare, quamuis id
facile fuerit, & hoc quisq; sibi ipse præstare possit, sed fide maxima curauimus de ar-
chetypo in aliquot exempla trãscribi, quæ patrocinio uestro Domini Prudentiss.
uisum est tuta defensa'q; publicare. Non parua in spe gauisuros uos tam honestã

uobis clientelam obtigiſſe, qui omnes bonas res cupiditate ac promptitudine in rep. ueſtra, quæ quidem eatenus abfuerint, inſtituere, conſtitutas autem diligentia & cura ſingulari conſeruare ſoleatis. Neq; parum hac uos confido credituros ornatum iri editione Regiomontani ſub nomine ueſtro ſcriptorum, quandoquidẽ illi uiuo V. ciuitati famam, quam deſtinatat, negatum fuit parere. Cum enim hãc mors ipſius excluſerit, una hæc ratio fuerit & inſtaurandæ illius & conciliandæ alterius generalis cuiuſdã benignitatis nimirũ & fauoris erga bonas artes ueſtræ. Qua his turbulentiſſ. temporibus inter has ſtulticias hominum complecti nos uideamus penè deſertas illas ab omnib. mortalib. Qua de cauſſa quantas laudum quamq; præclaras materias deducere poſſem quis non intelligit? Quid enim præconio literarum & harum protectio dignius? Aut quo in argumento libentius illæ uires ſuas & celebratione cultorum ac defenſorum ſuorum exercituræ uideantur, ſed mihi in ſuſcipiendo hoc onere conſiderandum ſcilicet, non ſolum quid cupiam, ſed etiam ac multo magis quid ualeam. Ne ſi parũ dextre quod uereor hanc rem adminiſtrauerim, & illæ iure de malo interprete, & V. Pr. detritore ſplẽdoris ſui cõqueri poſſint. Relinquam igitur hanc alijs prouinciam, qui gerant gnauiter, cuiuſmodi ut ſcio fuiſſe, ita futuros multos arbitror. Hoc modo uos orabo, ne qua re patiamini opt. & ſanctiſſ. hoc uobis propoſitum extorqueri, quo retento immortalem profecto gloriam conſequemini, qua & ipſi frui & quam poſteris ueſtris relinquere poſſitis. Qualia hæc ſint tempora uidetis, planè enim ut renaſcentes artes nemo magnopere reſpexit, illæq; ſuum tacitæ caput protulere, ita neglectas ſtertentib. hominib. interituras eſſe metuendum. Deus, ſolus enim Deus, conſeruare poterit, hanc immittendo Principib. & Ciuitatib. mentẽ, ut rigare arentes & caducas fulcire cupiant. Quod ut hactenus à uobis ſtrenue factũ cernimus, ita uos oro obteſtorq; per hoc nomine quæſitã celebritatem, ne intermittere uelitis. Ad me & hunc laborem meum quod attinet, ſatis fuerit mihi comprehendi me à ueſtra benignitate in uulgari numero literatorum, quos etiam cũ uos omnes tueri fouereq; conſtet, nõ timeo ne uobis ego excidam, néue poſt hanc etiam quaſi indicationẽ noſtri à uobis negligar. Valete Domini prudentiſſ. ex urbe ueſtra Norica pridie Iduum Sextil, anno ſalutiferi partus M. D. XXXIII.

Etsi uidebamur quibusdam de indicijs coniecturam certam fecisse, cui autor epistolam dedicationis conscripsisset, autoritate & doctrina præstantissimo, ut ipse ait, uiro, tamen quia in archetypo, quod manu ipsius descriptum esset, nominatim erat nullius præfixa mentio, maluimus relinquere huius etiam rei nobis arbitriū quàm nostrum iudicium interponere. Gratiorem rati nobis diligentiam fidelitatemq́; nostram, quàm in alieno libro ingenium & sapientiam futuram. Valete.

QVAMVIS hosce triangulorum libellos post epitoma cō scripserim, præpostero fretus ordine, posterius quidē opus texendo introductorium, q̄ artem ipsam tradiderim: nemini tamen triangulos nostros prætereunti astrorm disciplina satis agnoscetur. Quod si quispiam inique factū insimulet, is nisi me animus fallit, iure qui esset, ubi maiorum parere monitis & æquum & bonum arbitrabitur. Sanè moribundo præceptori morem gestum oportuit, qui absolutis nuperrime sex luminariū libris, superstites septē Ioanni suo reliquit, imò mandauit q̄ citissimum expediendos. Tantum nempe apud eū ualuit Bessarionis imperium, ut quod incolumis adhuc principi sponderat dignissimo, iuxta iam moriturus explere curaret. Igitur iussa præceptoris capessenti mihi, plurimus triangulorū & planorum & sphæralium incidit usus: quæ res iam pridem Georgio quoq; in primis sex libris crebro occurrens, animum induxit triangulorum artem conscribere. Verum ut epitomati finem, ita triangulis dare initium Deus ipse uetuit, quo nunc aspirante, orbitam uiri doctissimi quoad potero sectabor: eo quidem libentius, quo doctrinā hanc plerisq; placituram amicis arbitror, quorum quidem inseruire cōmodis bonam felicitatis meæ partem existimo: eos autem, ut uirtus ipsa monet, gratis amplexibus munus illud susceptum ire non dubito, siquidē ad alia demū altiora calcar addere pergūt. Si præterea magnis & scitu iucūdissimis rebus studere uelis, quisquis siderū motus admiraris, hæc triangulorum theoremata in primis legenda sunt: quippe quorū disciplina omnibus Astronomicis, nonnullisq; Geometricis quæstiis ianuam pandit. Quemadmodum enim cæteras figuras inuicem transmutandas ad triangulum usq; resolui oportet, ita reliquæ Astronomorū quæstiones hisce nostris egebunt libellis. Re uera planetarum æquatiōes numerare, ipsasq; in tabulis collocare, sed & eclipsibus luminariū satisfacere, quātæq; reliqs quinq; erraticis latitudines debeātur, nosse uolenti prior cōsulendus uenit liber. Qui demū in qualibet regione & ascensiones & arcus diurnos, deinde angulos sphærales eclipticū solari necessarios, mediationem cœli ac ortū obliquū stellis fixis euenire solitum: postremo omnia quæ per figuras sectoris non sine gra-

 in sudo

ui sudore passim exquiruntur, breuiter & q̃ facillimũ assequi cupiet,
ex posteriore libello comparabit auxilium. Quid memorẽ ñ stellarũ
à terra uarias mensuratuq́ incredibiles remotiones atq; corpulentias,
orbiumq́ suorũ spissitudines? quos limites corporibus densis resolu-
ti uapores transilire non ausint: grossicies insuper Cometæ quandoli
bet apparentis, eiusq́ à terra elongatio, nunquid nõ subtile uolet scru
tinium? His & mille alijs eiuscemodi rebus hæc triangulorũ præcepta
iter monstrabunt accuratissimũ, si prius obseruationibus motuũ atq;
alijs primordijs parumper exercearis. Quod si in tanta rerũ sciendarũ
copia, pleraq; dictu ambigua, aut factu forsitã ardua, lectoris noui de
terreant animũ, haud extemplo desperandum, digna etenim talibus
medela obiectabit, ubi theoremate q̃libet transcurso, ad numeros de-
scenderis exemplares. Ad hæc demũ accedit tabulæ sinuũ non minus
utilis q̃ noua compilatio, quæ absq; fastidio numerorum frangendo
rũ aut fractorum ad integros prolixa reductione per sinũ arcus suos
ex arcuq́ sinũ offeret, præter cæteras eius generis tabulas id quidẽ faci
litatis habens, q̃ per singula minuta expanditur: quantũq́ uni secũdo
in quolibet tabulæ respondeat loco, discernitur: id autem certitudinis
q̃ sinus totus in ea sex milia miliũ particularũ constituit. Interdũ ue-
ro primos duos quorumlibet numerorum characteres negligere nõ
dabitur uicio, si exactissimam operis præcisionẽ parui faciemus, quẽ
admodum canonibus suis cautum est. Quo tandem fieri oportet, ut
quæ cæteri longis scrutantur ambagibus, breui admodum nobis & iu
cunda inuestigatione consequi liceat. Hoc igitur ô pater optime, clien
tuli tui munus aspernari nolis, paucula q̃uis membrana contextũ, plu
rimis tamen atq; excelsis rebus solenne fundamentũ: Radicẽ scalæ ad
sidera ducentis haud iniuria dixerim: ubi quidem immodesti aliquid
si forte offenderis, iure tuo resecabitur licet: si uero quicq̃ egregij au-
toritas tua summaq́ huiuscemodi studiorũ peritia confirmandũ duxe
rit, tuo nomini consecratũ esto, qui quemadmodum durã hac tempe-
state Christianæ salutis accepisti prouinciã, ita murmura sua Philoso
phi moderni te imperatore missa facient. iamdudũ enim quasi cœlis
errantibus, sideribusq́ orbitas suas oblitis perculsi, spectatissimũ Phi
losophiæ genus socordia præterierc. Perge igitur ut cœpisti felici-
ter, ô mundi decus, terrenam prius compescere turbam, dehinc suo cœ
lestia lumina reducas itineri: ne ut antehac cultores deludãt suos, quo
tandẽ immortali posteris gloria nimirũ celebraberis. Vale.

De tris

DE TRIANGVLIS

LIBER PRIMVS.

DIFFINITIONES.

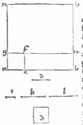
COgnita uocabitur quantitas, quam menſura famoſa, aut pro libito
ſumpta ſecundum numerum metitur notum. Quantitas menſu
rare dicetur aliā quantitatem, quæ in alia continetur ſecundū nume
rum notum, aut quæ in alia quantitate quoties unitas in numero no
to reperitur. Numerus autem notus habebitur, dū inter eius unita
tes diſcretionem pon't intellectus. Proportionem datam appellabimus, quan
do aut denominario ſua data eſt, aut ipſa uel ſibi æqualis proportio terminos ha
bet cognitos. Proportiones æquales ſunt, quibus una communis eſt denomina
tio. Quantitatum altera ad alterā data dicitur, dum menſura per quam altera
earū nota eſt, & reliquam notam efficit. Quantitates quotlibet inter ſe datas ap
pellabo, quas una communis menſura notas reddit. Differentia quantitatum
inæqualium uocatur portio maioris, qua minorem ſuperat. Coſta quadrati eſt
linea recta, ex cuius in ſe ductione quadratum ipſum naſcitur. Secundum quan
titatem lineæ circulus quilibet deſcribitur, dum ſemidiameter eius ipſi lineæ æqua
lis ſtatuitur. Arcus eſt pars circumferentiæ circuli. Linea uero recta ſibi con
terminalis corda ſua uocari ſolet. Arcu & corda ſua dimidiatis medietatem cor
dæ dimidij arcus ſinum rectum nuncupabimus. Complementum arcus cuiu
libet dicitur, quæ ſibi & quadranti intereſt differentia. Complementum autem
anguli differentia ipſius ad angulum rectum diffinitur. Si quamlibet termina
lem trianguli lineam baſim intellexeris, duas reliquas uſitato nomine latera uoca
ri licebit. In triangulo tamen æquicrurio latera dicimus duas æquales lineas,
& tertiam reliquam baſim. Sed & in omni triangulo linea quæ perpendicularē
ſuſtentat, baſis uulgo geometrarum nuncupari ſolet. Triangulus æquilaterus
dicitur, quem tres æquales claudunt lineæ. Aequicrurius, cuius duntaxat duæ
æquales ſunt lineæ terminales. Varius aūt triangulus, qui tres inæquales habet
lineas. Caſus perpendicularis uocatur portio baſis, perpendiculari & alterutro
laterum intercepta. Multiplicatio numeri per numerum eſt cuiuſdam numeri,
in quo multiplicatus continetur, quoties unitas in multiplicante procreatio.
Diuiſio autem numeri per numerum fit, quando numerus elicitur, in quo unitas
quoties diuiſor in ipſo diuiſo reperitur.

Communes animi conceptiones.

AEquales quantitates æqualiter mensurare. In duabus quoq; autquotlibet æquis quantitatibus mensuram eandem æqualiter contineri. Vnitatis ad quemlibet numerum, & econtra, datam esse proportionem. Omnis numeri partem esse unitatem ab ipso denominatam. Si à duabus quantitatibus inæqualibus æqualia aut idem commune abstuleris, relictis inter se atq; totis eandem haberi differentiam. Et si ex æqualibus quantitatibus inæquales portiones secueris, relictas & desectas alternatim æquales sortiri excessus. Omnem proportionem datam in numeris reperiri.

THEOREMA I.

Omnis datæ lineæ quadratum erit cognitum.



Ex data linea a b quadratũ describatur a h, quod dico cognitũ iri. Mensura em̃, ꝑ quã ipsa a b nota habeť sit linea d, cui ex duabus costis quadrati a h, q̃ sint a b & a n, abscindantur duæ æquales lineæ a e & a g, producaturq; g m quidem æquedistans lineæ a b & e f æquedistans ipsi a n, erit itaq; superficies a f quadrata per 29. & 34. primi elementoꝝ Euclidis. cũq; a b sit nota per mensurã linealẽ d aut a e sibi æqualẽ, sit k numerus secundũ quẽ d mẽsura uel a e mẽsurat lineã a b. & l numerus alius ad quem se habeat k, sicut unitas ad ipsum numerum, eritq; numerus l quadratus per octauam noni, cuius radix quadrata per uigesimam septimi numerus k declarabitur. Quoniam uero a b nota ponitur per mensuram d, aut a e sibi æqualem secundũ numerum k, erit a e in a b quoties unitas in k numero per diffinitionem, quare proportio a e ad a b est, sicut unitatis ad k numerũ Vt autem a e ad a b, ita per primam sexti quadratum a f ad paralellogramũ a m. quadrati ergo a f ad paralellogramum a m, & unitatis ad k numerum eadẽ est proportio. item per 34. primi b m æqualis est a g, quæ æquatur utriq; linearum a e & d. Proportio igitur b m ad b h costam quadrati a h est ut a e ad a b, uel a f ad a m, per primam autem sexti b m ad b h est ut paralellogrammum a m ad quadratũ a h. quare paralellogramũ a m ad quadratũ a h ꝓportionẽ habebit eam quam quadratum a f ad ipsum paralellogramum a m. Erat autem a f ad a m sicut unitatis ad k numerum: quare & a m ad a h erit ut unitatis ad k numerum, & ideo ut k numeri ad l numerum. Per æquam igitur proportionalitatem a f ad a h ut unitatis ad l numerum. Ex diffinitione itaq; a f quadratum æquale quadrato mensuræ famosæ d mensurabit quadratum a h lineæ a b secundum numerum l. & ideo notum habebitur quadratum a h, quod erat demonstrandum. ☞ Opus breuissimum. Numerus secundum quem nota est linea, in se multiplicetur, & productus erit numerus secundum quem quadratum eius notum habebitur. Vt si a e siue d mensura fuerit in a b secundum numerum 5. multiplicatis 5 in se, producuntur 25. quadratellum igitur a f in quadrato a h secundum numerum 25. reperitur, & similiter in reliquis.

II.

Quadrati noti costa non ignorabitur.

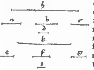
In figuratione superiori quadratũ a h statuatur notum per mensurã quadratam d, dico ꝙ costa eius a b nota ueniet. Inter unitatẽ enim & numerũ l, secundum quem mensura quadrata d est in quadrato a h, medius proportionalis sit k numerus, quem constat esse radicem quadratã numeri l, processus autẽ praemissae docuit parallelogrammũ a m esse mediũ proportionale inter quadratũ inter duo quadrata: a f quidem mensurans, & a b mensuratum. Cũq; sit proportio a f ad a h, sicut unitatis ad l numerum, id enim ex hypothesi pendet: erit proportio a f quadrati ad a m parallelogrammũ, tanꝗ unitatis ad k numerũ, quoniam utraq; harum ꝓportionum medietas est suae totius, sed quadrati a f ad parallelogrammum a m proportio est, ut lineae a e ad lineam a b per primã sexti, quare proportio a e, & ideo lineae d ad a b, sicut unitatis ad k numerum. Vnitas igitur in k numero quoties d linealis mensura in costa a b reperitur, unitas autẽ in k est secundũ ipsummet k numerũ. Omnis enĩ numeri pars est unitas ab ipso denominata, quare & mensura linealis d continebitur in costa a b secundum numerum k. ex diffinitione igitur costam a b notam effecimus, quod expectabatur ostendendum. Tenent autẽ haec omnia, dum l numerus secundũ quem mẽsuramus quadratum ꝓpositum, quadratus occurret. tunc enim reperibilis est medius proportionalis inter eum & unitatem: ꝙ si numerus l non quadratus fuerit, nullus erit medius proportionalis inter eum & unitatem, neq; unꝗ costa quadrati nota habebitur, stando in terminis quemadmodũ diffiniti sunt. Cum autẽ saepenumero accidat numeros secundũ quos quadrata nostra metimur esse non quadratos, ne prorsus ignoremus propinquũ ueritati (ut sunt scibilia humana) laxius posthac utemur uocabulo quantitatis notae, ꝗ initio diffinierimus. Quantitatem igiť oẽm quae aut nota praecise fuerit, aut notae quãtitati fermè aequalis, uniuoce notam appellabimus. pulchrius eqdẽ arbitror scire propinquũ ueritati, ꝗ ueritatem ipsam penitus negligere: non modo enim contingere metam, uerumetiã propinque accedere uirtuti dabitur. Non libuit autẽ hoc pacto superius diffinire quantitatẽ notam per praecisum & ꝓpinquum, ne suspecta lectori diffinitio nostra redderetur, fluctuante uocabulo propinqui id agente: nam etsi praecisum pro uero ponere soleamus, ꝓpinquum tamen ueritati uix diffinitionem lectori satis facturam acciperet. Ad rem ipsam demum redeundo, quoties numerus occurret non quadratus, siue integer, siue fractus fuerit, accipiemus loco eius numerum quadratum ipsi ut libet ꝗ ꝓpinquissimum, siue integer, siue fractus fuerit, inter quem & unitatẽ medium ꝓportionalem eliciemus, & procedendo ut supra notam concludemus costam quadrati, quod mensuratur secundum numerum quadratum pro libito acceptum. Quemadmodũ autem numerus non quadratus noster, numero quadrato assumpto propinquus est, ita & costa quadrati nostri costae alterius quadrati praecise cognitae propinqua, & ideo nota habebitur. ¶ Operatio facillima. Extrahe radicẽ numeri secundum quem mensuratur quadratum ꝓpositum: si quadratus fuerit numerus huiusmodi, aut radicem numeri quadrati sibi propinqui, si non quadratus occurret, ipsa enim radix elicita quadrati tui costam notificabit.

Quantitas nota laxius definitur, & magis usitate.

III.

Si quotlibet quantitates inter se datae fuerint, aggregatũ ex eis notum habebitur.
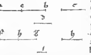
Tres quantitates a b c, aut quotlibet inter se datæ sint, quarum aggregatum sit h, dico ꝙ ipsum h aggregatum fiet notum. Quoniam enim inter se datæ sunt quantitates illæ, mẽsurabit eas communiter una quantitas quæ sit d, mensuret igitᷣ quantitatem a quidem secundum numerum e, & b secundum numerum f: quantitatẽ autem c secundum numerum g, ex his tribus numeris coaceruatis resultet numerus k. Cum igitur sit d in a, quoties unitas in e numero per diffinitionem quantitatis notæ, erit ꝓportio a ad d mensuram, sicut e numerum ad unitatẽ, similiter erit ꝓportio b ad d tanꝗ numeri f ad unitatem, & c ad d ut g ad unitatem; quare per. 24. quinti bis assumptam proportio aggregati ex tribus quantitatibus a b c, quod est h ad d mensuram, erit ut aggregati ex tribus numeris e f g, qui est k ad unitatem, unitas ergo in k numero quoties d mensura in aggregato h continebunt. diffinitio itaq; quantitatis notæ concludet propositum.



IIII.

Duarum inæqualium inter se datarum quantitatum, differentiam cognitum iri.

Sint duæ quantitates inter se datæ, a b quidem maior, & c minor, quarũ differentia sit a e, quam prædico futuram notam. Communis enim mẽsura ambas metiens datas quantitates sit d, quæ mẽsuret quãtitatem a b quidem secundum numerum f g, & quantitatem c secundum numerum h, erit itaq; proportio a b ad d sicut numeri f g ad unitatẽ, d autem ad b c sicut unitatis ad h, per æquã igitᷣ a b ad c sicut f g ad h. Quemadmodum ergo a b maior est c quantitate, ita f g maior est h numero, separatoq; numero k g æquali ipsi h, ex f g differentia eorum habebitur f k, & erit diuisim proportio a e ad e b, siue ad c sicut f k ad k g siue ad h. Quantitas autem c ad d mensuram, ut h ad unitatem. per æquam igitur a e ad d sicut f k ad unitatem, & ideo d mensura in a e differentia, quoties unitas in f k numero continebitur: quare per diffinitionem a e differentia nota redditur, quod erat deducendum. ¶ Operaberis autem hoc pacto. Duorum numerorum secundum quos mensurantur quantitates datæ, minorem ex maiore demas, relictus enim numerus cum mẽsura cõmuni notam efficiet differentiam inter se datarum quantitatũ. Qđ si huiusmodi duo numeri in unitate sola differant, differentia ipsarum quantitatum mensuræ communi reperietur æqualis, modus autem id demonstrandi à pristino non discrepabit.

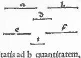


V.

Omnes duæ inter se datæ quantitates proportionem habent eam, quam duo numeri secundum quos ipsæ mensurantur, unde manifestum proclamabimus, omnem proportionem datam in numeris reperiri.

Sint duæ quantitates a & b inter se datæ, quas ex diffinitione cõmunis quantitas

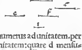
titas d mensuret a quidem secundum e numerũ, b uero secundum f, dico ꝙ proportio a ad b est sicut proportio numeri e ad numerũ f. quoniam enim d mensurat a secundum e numerũ, erit per diffinitionem d in a quoties unitas in e numero, & ideo a ad d ꝓportio tanq; e ad unitatem. Item d in b quoties unitas in f numero reperitur, d mensuran te b secundum f numerum, quare proportio d ad b si cut unitatis ad f numerum. per æquam igitur a quantitatis ad b quantitatem, tanq; numerũ e ad numerum f erit ꝓportio, quod libuit concludere.



VI.

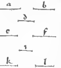
Proportio duarum quantitatum data, ex altera earum præscita, reliquã suscitabit cognitam.

Altera duarum quantitatum a & b notam ad inuicem proportionem habentium, sit cognita; dico, ꝙ & reliqua nota dabitur. Aut enim ꝓportio illa data est per denominationem, aut per sibi æqualem proportionem. Sit primo data per denominationem, ponaturq; numerus c denominator huiusmodi proportionis, cunq; altera duarum quantitatũ nota subijciatur, sit antecedens a nota per mensuram d secundum numerũ e, quo diuiso per numerum c denominatorẽ proportionis, exeat numerus f, erit itaq; per diffinitionẽ diuisionis c in e, quoties unitas in f numero, & ideo ꝓportio c ad e sicut unitatis ad f, permutatimq; c ad unitatem sicut e ad f. Proportionem aũt c ad unitatem denominat ipsemet numerus c. denominabit igitur & ꝓportionem e ad f. cunq; denominet etiam proportionẽ a ad b, erit per diffinitionem æqualium proportionũ a ad b sicut e ad f, & conuersim b ad a sicut f ad e, sed a ad d mensuram sicut e numerus ad unitatem. per æquam igitur b quantitas ad d mensuram sicut f ad unitatem: quare d mensura in b quantitate, quoties unitas in f numero continebitur, ex diffinitione ergo b quantitas reliqua nota redditur. Qđ si b consequentẽ attuleris datam, sit hoc ꝑ d mensuram secundum numerũ f, qui multiplicatus per numerum c denominatorem proportionis, producat numerũ e, secundũ quem oportebit esse notã quantitatem antecedentẽ a, erit enim per diffinitionẽ multiplicationis f in e, quoties unitas in c: quare proportio e ad f sicut c ad unitatem. Proportionis autẽ c ad unitatem denominator est ipsemet numerus c. omnis enim numeri pars est unitas ab ipso denominata, quare per conuersionẽ diffinitionis c numerus denominabit proportionẽ e ad f, denominabat aũt & ꝓportionem a ad b, æquales igiť ex diffinitione sunt proportiones a ad b & e ad f, sed b consequentis ad d mensuram sicut numeri f ad unitatẽ, ꝙ b nota supponatur per d mensuram secundum numerũ f, per æquam ergo fiet proportio a ad d mensuram sicut numeri e ad unitatem. a itaq; continebit d mensuram, quoties e numerus unitatẽ, & ideo per diffinitionem notæ quantitatis concludemus propositum. ¶ Si autem data sit ꝓportio quãtitatũ per sibi æqualẽ, illa scilicet sibi æqualis terminos habebit cognitos, qui aut erunt numeri, aut ex præmissa proportionẽ habebunt adinuicem, sicut numeri, qui sint k & l, ita ꝙ a ad b ꝓportio sit tanq; k numeri antecedentis ad l numerum consequentem. Positaq; primum quantitate antecedente a nota per mensuram d secundũ numerum e, multiplicetur e per l, & productus



B 2 scilicet

ſcilicet m numerus diuidatur per k numerum antecedentem, ut exeat numerus f, erit itaq; per ſecundam partem uigeſimæ ſeptimi proportio e ad f ſicut k ad



l, & conuerſim f ad e ſicut l ad k, & ideo ſicut b ad a, ſed e ad unitatem ſicut a ad d menſuram ex diffinitione notæ quantitatis. per æquam igitur f ad unitatem ſicut b quantitas ad d menſuram; quare b quantitas continebit d menſuram quoties f numerus unitatem. per diffinitionem ergo quantitatis notæ inferemus propoſitum. Si deinum b quantitas conſequens ponatur nota, ſit hoc per menſuram d ſecundũ numerum f, ductoq; f in k numerum, productoq; diuiſo per l, exeat numerus e, eritq; per ſecundam partem uigeſimæ quinti ut ſupra: proportio l ad k ſicut f ad e, & conuerſim k ad l ſicut e ad f. ſed erat k ad l ſicut a ad b: quare e ad f ſicut a ad b, f autem ad unitatem ſicut b ad d menſuram, quotiã d menſurat b ſecundũ numerũ f, per æquam igitur a ad d menſuram ſicut numerus e notus ad unitatem, erit itaq; d in a, quoties unitas in e numero noto, diffinitio ergo quantitatis notæ quod reliquũ eſt cõcludet. ¶ Opus habeto bimembre. Si proportio data offeratur per denominationẽ, & antecedens quantitas fuerit nota, diuide numerum quantitatis antecedentis per numerũ denominatorẽ ꝓportionis, & exibit numerus quantitatis conſequentis. Si aũt conſequentem habeas quantitatem notã, multiplica numerum eius per numerũ denominatorẽ proportionis, & producetur numerus quantitatis antecedentis. In exemplo: Si fuerit a .24. proportio autem eius ad b quantitatẽ tripla, ecce denominatorẽ proportionis 3. per quem diuido 24. & exibunt 8. pro quantitate conſequente b. Si autem b ſit 8. ꝓportio uero a ad b quintupla, multiplicabo 8. per 5. denominatorẽ proportionis, & producent 40. pro a quantitate. Qd' ſi proportio data fuerit per ſibi æqualem proportionẽ, & antecedens quantitas fuerit data, multiplicabis numerũ quantitatis antecedentis per numerum conſequentẽ, & productum inde diuides per numerũ antecedentem, exibit enim numerus ſecundum quẽ quantitas conſequens nota habebitur. Si uero quantitas conſequens data fuerit, numerũ eius per numerũ antecedentem multiplica, & productũ per numerum conſequentẽ partiaris, qui enim exibit numerus, quantitatem antecedentẽ notificabit. Vt ſi a fuerit 8. & proportio eius ad b ſicut 4. ad 5. multiplicabo 8. per 5. producuntur 40. quæ diuidam per 4. exibunt 10. pro quantitate b. Sed ꝓportio a ad b ſit, ut 3 ad 7, ſitq; quantitas b 28. multiplicabo 28 per 3, producendo 84. quæ diuido per 7. exeunt 12. erit igitur a quãtitas 12. Ita in cæteris.

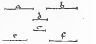
VII.

Si fuerint duæ quantitates inter ſe datæ, quarum altera per menſuram nouam ſit cognita, & reliqua per eandem nouam menſuram nota ueniet.

Vt ſermo tam breuior q̃ lucidior appareat, ueterem diffiniuimus menſuram eam, per quã ambæ quantitates cõmuniter notæ ſunt, nouam uero, per quam altera earum tantum. Hæc autẽ à præmiſſa in hoc diſcrepat, q̃ illa alteram duntaxat quantitatũ ſupponit datam, hæc uero ambas quantitates ſubijcit notas per unam menſuram cõmunem, & inſuper alteram earum per menſuram aliam. Sunt igitur duæ quantitates a & b datæ per menſuram cõmunem d, quã dicemus ueterem,

altera

altera insuper earum (uerbi gratia) a data sit per mensuram nouam c: dico, ꝙ & b quantitas per eandem c mensurā nota prosiliet. Metiatur enim d mensura duas quantitates subiectas a & b secundū numeros e & f, erit itaq; per quintā huius proportio duarum quantitatum a & b, tanq; duorum numerorū notorum e & f, quæ cum sit nota, erit etiam proportio quantitatum a & b nota. Est autem a quantitas data per mēsurā c, quare per præmissam & b quantitas per eanden notificabitur mensuram, quod uolebamus inferre.

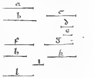


☞ Operatio huius habita proportione duarum quantitatum propositarum in terminis notis, ab opere præcedentis non dissonabit.

VIII.

Si utraq; duarum quantitatum ad tertiam data fuerit, ipsæ inter se datæ habebuntur.

Duarum quantitatū a & b utraq; ad tertiam quantitatē c data intelligatur: Dico, ꝙ ipsæ inter se reddentur notæ. Quoniā enim utraq; quantitatū a & b ad quantitatē c data est, mensurabit eas cōmuniter una mensura, quæ sit d, similiter duæ quantitates b & c, mensuram habebunt unam cōmunem, quæ sit e. Si itaq; d & e mensuræ æquales fuerint, eas tanq; unam nō iniuria reputabimus, sic'q; duas quantitates a & b, quantitas una cōmunis metietur; unamquāq; secundū numerum suum, per diffinitionē ergo inter se datæ comprobantur. Si uero duæ mēsuræ d & e diuersas se obtulerint, duæ quantitates dictæ, etsi datæ habeantur seorsum, inter se tamen nondū datæ sunt. Mensuret igitur d quantitates a & c secundum numeros f & g, mensura autē e duas quantitates b & c secundū numeros h & k. Placeat itaq; duas quantitates a & b inter se notas efficere per mensuram d, quam pro libito primā e uero secundam nuncupabimus: similiter ꝗꝗ; a quantitatem primam uocare licebit, b autem secundam, ꝙ hanc cum c quantitate prima mensura, illam uero secunda metiatur, hoc enim pacto sermonis uitabitur cōfusio. Reperiatur itaq; numerus l, ad quem se habeat g numerus sicut k ad h, ꝗd facile fiet, si ad uigesimam septimi recurres. Cunq; sit proportio h ad k, sicut quantitatis b secundæ ad quantitatem c tertiam, ex quinta huius, erit & l ad g tanq; b ad c, sed g numerus ad unitatē, sicut quantitas c ad mensuram d primam, cum c quantitas nota sit per mensuram d secundū numerum g. Per æquam igitur l numerus ad unitatem, sicut b quantitas ad d mēsuram; quare b continebit d mensuram quoties l numerus unitatem, & ideo per diffinitionem quantitatis notæ, b quantitas nota habetur per mensuram d, quā continet secundum numerum l. erat autem & quantitas a per eandem mensurā nota. ex diffinitione igitur inter se datarum quātitatum constabit a & b inter se datas esse. Qd' si idem per mensurā e consequi libeat, sicut ipsam e mensurā primam, ita & b quātitatem primā dicemus, ad numerum autem l se habeat k numerus, tanq; g ad f, reliqua ut antehac procedent. Vniuersaliter enim mensura, per quā duas quantitates ad tertiā datas inter se notas efficere conamur, prima uocabitur, reliqua uero secūda. Similem deniq; ordinem duabus quātitatibus dictis



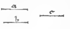
 deputa-

deputabimus eam notando primã, cui & quantitati tertiæ prima respondet mensura, reliquã uero secundã. Ad numerum autem reperiendum, qui uidelicet notificaturus est quãtitatem secundã se habeat numerus quãtitatis tertiæ primus, sicut numerus eiusdem quãtitatis tertiæ secundus ad numerum quãtitatis secundæ, primum autem numerum quãtitatis tertiæ duos habentis numeros, loco cum secundum quem prima mensura in ipso continetur numero, reliquũ autem secundum.
Operationem sic habebis. Numerum quãtitatis secundæ duc in numerum primum quãtitatis tertiæ, productum uero per numerũ secundum eiusdem quãtitatis tertiæ partiaris, exibit enim numerus quãtitatis secundæ quæsitus, secundum quẽ uidelicet mensura prima in ipsa secunda quãtitate continetur, ut in exemplo. Sit quantitas a 5. cubitorum, dum c est 9. cubitorum, item b 7. pedum, dũ c est 26. erit itaq; d cubitus unus, & e pes unus. Volo scire quot cubitos habeat quantitas b, multiplico 7 per 9, producuntur 63, quæ diuido in 26, exeunt $2\frac{11}{26}$. Quantitas igitur b duos complectet cubitos, & undecim uigesimassextas unius cubiti, sicq; duas quãtitates a & b inter se notas reddidimus, utendo mensura d cubitali. Nõ aliter operabimur, si per mensurã e pedalem ipsas nouisse libeat quantitates. Cõstat igit ex hoc, ꝙ 7 pedes $2\frac{11}{26}$ cubitis æquipollent, diuisoq; numero 7 pedum in numerum cubitorum sibi æquipollentiũ, exibit numerus pedum correspondentiũ uni cubito, qui numerus erit $2\frac{8}{9}$. hoc quoniã multis in locis utile est, prætereundi non erat consilium. Possumus autem & breuius theorema præsens stabilire, si ad præmissam confugerimus. Libeat enim duas quantitates a & b inter se notas efficere per mensurã d, quoniã itaq; duæ quantitates b & c datæ sunt per mensurã e ueterem, quarũ altera uidelicet c data est per mensurã nouã d, erit & b quantitas ex præmissa per eãdẽ nouã mensurã d cognita, sed hypothesis subiecit a quãtitatem notã per d mensurã. Duæ igitur quãtitates a & b, quas una communis mensura d metitur secundũ numeros notos, cognitæ per diffinitionem declarantur, quod pollicebamur ostendendum.

IX.

Si duarum quantitatum utraq; ad tertiam data fuerit, summã earũ atq; differentiam, si inæquales fuerint, cognoscemus.

Duarũ quantitatũ a & b utraq; sit data ad c quantitatem: Dico, ꝙ summa ex eis conflata cognoscetur, cum differentia earũ si inæquales fuerint. Si eñ inter se datæ fuerint, tertiã & quartam huius consulemus, si uero non inter se, sed ad tertiam duntaxat, quemadmodũ supponitur, datæ sint, per præmissam reddemus eas inter se datas, quo facto, per tertiã & quartã præallegatas, quod reliquũ est absoluemus.



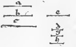
Operationem autem huius ab operationibus dictarum propositionum pendere nemo dubitabit.

X.

Quotlibet quantitates ad aliam datæ, inter se non erunt ignotæ.

Tres quantitates a b c, aut quotlibet datæ ponantur singulatim ad quantitatem e: Dico, ꝙ ipsæ inter se notæ uenient. Quoniã enim a & e inter se datæ sunt mensurabit eas communiter mensura una, quæ sit d, similiter b & e communem habebunt mensurã, quæ sit d, sed & duæ quantitates c & e per mensurã h notæ intelli

intelligantur. Si igitur tres mensuræ d g h æquales fuerint tres quantitates propositas inter se datas, ex diffinitione conuincemus: si uero inæquales occurrant, non erunt dictæ quantitates inter se datæ. Volenti ergo tres quãtitates propositas inter se notas efficere, eligenda est una trium mensurarum, per quã id facere placet, sitq; d talis mensura, quam, ut circa octauã diffiniuimus, primã dicemus, quãtitatem quoq; a primã trium quantitatũ statuemus. Cum itaq; duæ quãtitates a & b ad tertiã c quantitatem datæ sint, erunt ipsæ inter se notæ, quemadmodũ octaua huius docuit per mensurã d communem. Item duabus quãtitatibus a & c datis, existentibus ad quantitatem c tertiã, eas inter se notas, efficiet octaua huius per mensurã d cõmunem. Tres itaq; quantitates a b c, mensura una communis notas reddidit, quare per diffinitionem inter se notarum quantitatũ ueritas constabit propositionis. Non aliter procedendũ erit, si plures quã tres huiusmodi occurrent quantitates, neq; refert quãcunq; cõmunium elegeris. Ad summã igitur huius theorematis processus totus non est, nisi octauæ huius tenor repetitus. ◤ Opus quoq; huius ab operatione illius octauæ, quoties oportuerit resumpta non differet.



XI.

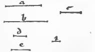
Aggregatum ex quotlibet quantitatibus ad aliam datis, cum differentia duarum quarumlibet si qua fuerit, nõ ignorabit Geometra.

Si enim quantitates illæ inter se notæ fuerint, tertiam & quartã huius repetemus, quod si non inter se, sed ad aliam tantũ, quemadmodũ supponitur, datæ extiterint, posteaq; ex præcedenti theoremate inter se notas reddiderimus eas, ad tertiã huius & quartã confugiemus. ◤ Opus autem, cũ & facile sit, & ab opere dictarum propositionum pendeat, prætereundum censeo.

XII.

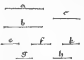
Si utriusq; duarum quantitatum ad tertiam data fuerit proportio, earum inter se proportionem patefieri.

Sint duæ quantitates a & b, quarũ utraq; ad quantitatem c proportionem habeat cognitã: Dico, quod proportio a ad b nota ueniet. Oportet enim notas esse proportiones a & b quãtitatum ad c quantitatem, aut per denominationes, aut sibi æquales proportiones. Sit hoc primo per denominationes. cum itaq; proportio a ad c nota sit, erit denominatio eius nota. sit ergo denominator huius proportiõis numerus d, similiter denominator proportionis b ad c notæ sit numerus e, erit autem proportio a ad c, sicut d ad unitatem, nam utriusq; harũ proportionũ denominator est ipse numerus d. denominat enim proportionem a ad c quẽadmodũ posuimus, sed & proportionẽ sui ad unitatẽ per cõmunẽ animi conceptionẽ, omnis enim numeri pars est unitas ab ipso denominata. per eadem quoq; media erit proportio b ad c tanquã e ad unitatẽ, & conuersim c ad b sicut unitas ad e, erat autem c



a ad c, ut d ad unitatem. per æquam igitur proportio a ad b sicut d ad e, sed proportio d ad e nota est per diffinitionem: quare & proportio a ad b nota redditur. Liquet itaq; ex dictis proportionem primæ quantitatis ad secundam æqualẽ esse proportioni

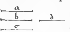
proportioni denominatoris primi ad denominatorem secundum, quod pro corollario non inutili reputabimus. Quòd si a & b quantitatũ ad c proportiones datæ offerantur per sibi æquales ꝓportiones, oportebit eas in numeris reperiri per diffinitionem proportionis datæ & quintã huius. Sit itaq; ꝓportio a ad c sicut numeri e ad numerũ f, quãtitatis uero b ad c sicut numeri g ad numerũ h, multiplicato'q; f per g, & producto diuiso per numerũ h, exeat numerus k, erit'q; per secundã partem uigesimæ septimi ꝓportio h ad g, sicut f ad k. Cum igitur e numerus ad f se habeat, sicut a quãtitas ad c quantitatem, f autem ad k sicut h ad g, & ideo conuersim argumentando, sicut c quantitas ad b quãtitatem, erit per æquam proportio e numeri ad k numerum, sicut a quantitatis ad b quãtitatem, ꝓportio autem e numeri noti ad k numerum notũ data est. quare & proportio a quantitatis ad b quãtitatem cognita elicitur, q̃d libuit explanare. ◤ Opus primũ. Denominatorem primæ proportionis per denominatorem proportionis secundæ partiaris, exibit enim denominator ꝓportionis quã habẽt dicti denominatores, primus uidelicet ad secundũ, quæ etiam proportioni primæ quãtitatis ad secundã communis existit. Aut denominatores ipsos serua pro noticia proportionis, satis enim nouisti primæ quantitatis ad secundã, si eam in numeris notis reperisti. Vt si ꝓportio a ad b fuerit quintupla, b uero ad eandẽ c quãtitatem septupla: cum primæ proportionis denominator sit 5, secundæ uero 7, erit proportio a ad b sicut 5 ad 7. ◤ Opus aliud. Numerũ consequentem primæ proportionis duc in numerũ antecedentem secundæ proportionis & productũ diuide per numerum consequentem secundæ proportionis, exibit enim numerus ad quẽ se habet numerus antecedens primæ proportionis, sicut prima quantitas ad secundã. Vt si a ad c fuerit proportio sicut 5 ad 7. b autem ad c sicut 3 ad 8, multiplicabo 7 per 3, producentur 21, quæ diuido per 8, exeunt $2\frac{5}{8}$, a igitur habebit se ad b sicut 5 ad $2\frac{5}{8}$.



XIII.

Si quotlibet quantitatũ ad aliam datæ fuerint proportiones, omnium duarum ex eis proportio manifestabitur.

Tres quantitates a b c, aut quotlibet plures ad quantitatem aliã d proportiones habeant cognitas. Dico, ꝙ quælibet duæ ipsarum proportiones sortientur datas. Placeat enim primum proportionem a ad b reddere notã. Cum itaq; utriusq; quãtitatum a & b ad quãtitatem d proportio sit nota, earum inter se proportio non ignorabitur ex præmissa. Similiter de omnibus duabus reliquis prædicabimus. Nihil enim alieni præsens addit præmissæ, nisi ꝙ processum eius ingeminat. ◤ Opus q̃q; huius opus illius est, quoties oportuerit repetitũ.



XIIII.

Si utriusq; duarum quantitatum ad tertiam data fuerit proportio, fuerit'q; altera earum nota, reliqua quoq; notam se offeret.

Vtriusq; duarum quãtitatũ a & b ad quãtitatem c data sit proportio, sit'q; a quantitas nota. Dico, ꝙ & b quãtitatem notam fieri oportet. Cũ enim utraq; earum

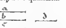
earum ad c datam habeat proportionem, proportio ipſarũ inter ſe per 12. huius nota ueniet. quare per ſextam huius c quantitate nota exiſtente, & b quãtitas nota emerget, quod expectabatur de clarandum. ¶ Operatio aũt huius ex operibus duodecimæ & ſextæ hinc commiſcetur. Nam poſtq̃ ex duodecima huius proportionem huiuſmodi quantitatum reperies, per ſextam tandem, quæ prius ignota erat, notam efficies quantitatem.



XV.

Si quotlibet quantitates ad aliam quandam proportiones habuerint datas, quarũ una quælibet ſit nota, reliquæ omnes notæ proſiliẽt.

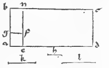
Sint tres aut quotlibet quantitates a b c, quarum unaquæq; ad c quantitatem proportionem habeat datam: ſitq; una earum quæcunq; (uerbi gratia) a data. Dico, q̃ reliquæ omnes notæ occurrent. Erit enim per 13. huius proportio a quantitatis ad ſingulas alias data, quare per ſextam huius a quantitate nota exiſtente, ſingulæ reliquæ innoteſcent, quod erat concludendũ. ¶ Operationem ex tredecima & ſexta huius facile comparabis.



XVI.

Quod ſub duabus inter ſe datis rectis lineis continetur, parallelogramum rectangulum latere non poterit.

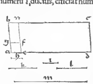
Sit parallelogrammũ rectangulum a b c d, duabus inter ſe datis contentum lineis a b & a d. Dico, q̃ ipſum prodibit cognitum. Quoniã enim duæ lineæ a b & a d inter ſe notæ ſunt, menſurabit eas communiter una quantitas quæ ſit h. menſuret itaq; lineam a b ſecundum numerum k, & lineam a d ſecundum numerũ l, & abſcindant ex duobus lateribus pallelogrami ꝓpoſiti: duæ lineæ a g & a e, quarum utraq; menſuræ communi h æqualis exiſtat, productis lineis e n quidem æquediſtante ipſi a b & g f, æquediſtante lateri a d, eritq; per 29. 34. primi & diffinitionem quadrati ſuperficies a f quadrata. cumq; h ſiue a g ſibi æqualis menſuret latus a b ſecundum numerum k, erit a g in a b quoties unitas in k, & ideo proportio a g ad a b, ſicut unitatis ad k numerum, quare p primã ſexti proportio quadratelli a f ad parallegrammum a n, ſicut unitatis ad k numerum. Vnitatis autem ad k numerum proportio data eſt per animi conceptionem, quare & ꝓportio quadratelli a f ad parallelogrammum a n nota perhibebitur. Item quoniã a e æqualis ipſi h menſurat latus a d ſecundum numerũ l, erit a e in a d, quoties unitas in l numero. quare proportio a d ad a e eſt ut numeri l ad unitatem. proportio autem a d ad a e per primã ſexti eſt tanq̃ parallelogrãmi a c ad parallelogrammum a n. parallelogrãmum ergo a c ad parallelogrãmum a n ſicut numerus l ad unitatem. ſed numerus l ad unitatem proportionem habet datam ex communi animi conceptione, unde & proportio a c ad a n ſcita uenier. Iam igitur duarum quantitatum ſuperficialium a f & a c, utraq; ad parallelogramũ a n proportionem habet datam, quare per 12. huius earum inter ſe conſtabit proportio.



& quoniam quantitas a f nota est: in omnibus namq; mensurationibus notam supponi oportet mensuram, per sextam huius parallelogramū a c notum e nunciabitur, quod erat peragendum. Constat autem hoc in ꝓposito quadratellum a f esse mensurā superficialem, ꝙ costam eius a e mensuræ lineali li[illegible] æqualē initio statuerimus. ◤ Idem alio tramite consequemur. Prolongetur utraq; linearum c b & d a uersus sinistrā, donec duæ lineæ b p & a q sibi, & lineæ a b æquales ueni



ent. continuatisq; terminis earum p & q, per lineam p q claudetur quadratum q b per 29. 33. primi, & diffinitionem quadrati, cuius cum hypothesis notā dederit costam a b, ipsum quoq; ꝑ primā huius notum habebitur. est autē ex prima sexti ꝓportio quadrati q p ad parallelogramum a c, tanq; q a siue a b ad a d. proportio autem a b lineæ notæ per hypothesim ad a d notam per diffinitionem data, unde & proportio quadrati q b ad parallelogramū a c data erit. per sextā igit huius (quadrato q b noto existente) ueritatem theorematis inferemus. ◤ Adhuc aliter & ad operationem aptius. Resumpta figuratione prima, numerus k in numerū l ductus, efficiat numerū l m. Cū itaq; ut supra memoratū est, propor

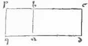


tio quadratelli a f ad parallelogramū a n est, sicut unitatis ad k numerum. a n autē ad a c sicut unitatis ad l numerum. superius enim erat a c ad a n tanq; numeri l ad unitatem, unitatis demū ad l numerum sicut numeri k ad numerū m. est enim k in m, quoties unitas in l ex diffinitione multiplicationis. per æquā igit̄ ꝓportionalitatem erit a f quadratelli ad a c parallelogrammum, sicut unitatis ad m numerum. quare a f in a c, quoties unitas in m numero reperitur. ꝑ diffinitionem itaq; notæ quantitatis parallelogramum a c notum effecimus, in eo enim mensura superficialis a f continetur secundum numerum notum, qui est m quod libuit absoluere. ◤ Opus autem docebimus unicum, tametsi demonstratione freti simus uaria. Duos numeros duorum laterum parallelogrami notorum in se multiplicabis, alterum uidelicet in alterum, ꝓducetur enim numerus parallelogrami secundū quem mensura superficialis, quadratū scilicet mensuræ linealis in ipso continebitur parallelogramo. Vt si latus a b 5, & latus a d 7, pedes cōplectatur lineales, ductis 5 in 7, creabuntur 35. tot igitur pedes quadrati parallelogramum a c constituent. Ita in cæteris operabere.

XVII.

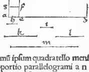
Ex dato latere quolibet parallelogrami rectanguli cogniti, reliquū latus emerget notum.

Sit parallelogramum rectangulū a b c d cognitum, cuius etiam latus unū quodcunq; fuerit notum habeatur, sitq; (uerbi gratia) a b. Dico, ꝙ reliquū latus eius a d scitum erit. Eductis namq; lineis d a, & c b ad puncta q & p, donec utraq; linearū a q & b p æquabitur lineæ a b datæ, compleatur quadratum q b protracta linea p q, erit itaq; per primā sexti ꝓportio q b quadrati ad a c parallelogramum sicut lineæ q a ad lineā



a d, est

a d. est autem proportio quadrati q b ad ipsum parallelogramum a c data per diffinitionem, ꝙ utraqꝫ superficierum q b & a c data sit. q b quidem ꝑ primam huius, est enim quadratum lineæ a b datæ, parallelogramum autem a c notum subiecit hypothesis. Proportio igitur & lineæ q a ad lineam a d nota redditur, sed q a & a b sunt costæ quadrati q b æquales, unde & proportionem a b ad a d notam esse oportet, cumqꝫ altera illarum, scilicet a b nota supponatur, erit per sextam huius reliqua linea scilicet a d nota, sicqꝫ reliquum parallelogrami latus a d notum exegimus, quod libuit attingere. ◤ Idem aliter & ad operationem accomodatius. Quoniā latus a b notū supponit̃, mensuret ipsum h famosa quantitas secundum numerum k, sitqꝫ utraqꝫ linearum a g & a e ex parallelogrami nostri lateribus absumptarum æqualis mensuræ h, & ducatur e n quidē æquedistans lateri a b, g f uero lateri a d æquedistans, eritqꝫ superficies a f quadrata per 29. & 34. primi & diffinitionem quadrati, quæ quidem superficies mensurabit parallelogramū a c secundum numerū notum, qui sit m. quoniā parallelogramū supponitur cognitum, hunc numerum in postremo per numerum k partiamur, ut exeat l numerus. Quia itaqꝫ ꝓportio a b ad h, siue ad a g est, ut numeri k ad unitatem, h mensurante lineam a b secundū k numerum: erit per primā sexti parallelogrami a n ad quadratellum a f, sicut numeri k ad unitatem. quadratelli autem a f ad parallelogramū

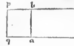


a c, sicut unitatis ad numerum m, ꝙ parallelogramū ipsum quadratello mensuretur secundum numerū m, quare per æquam proportio parallelogrami a n ad parallelogramum a c est, ut numeri k ad numerum m. est autem a n ad a c, tanqꝫ a e siue h sibi æqualis ad lineā a d per primā sexti. Vnde & h ad a d est ut k numeri ad numerum m, sed k ad m sicut unitatis ad l numerum per diffinitionem diuisionis, quare proportio h ad lineā a d est, sicut unitatis ad l numerum. mensura igitur h in linea a d, quoties unitas in numero l continetur, quare linea a d nota concluditur, quoniā mensura h famosa continetur in ea secundum numerum l notum. reliquum ergo parallelogrami latus effecimus cognitū, quod intendebamus. ◤ Opus breue. Numerum parallelogrami noti in numerum lateris noti partiaris, & exibit numerus lateris reliqui quæsitus. Vt si parallelogramum a c offeratur 36. pedum superficialium, habens latus a b 4 pedum linealium, diuidā numerum 36 in numerum 4. & exibunt 9. Latus igitur reliquum a d, nouem pedes complectetur lineales.

XVIII.

Ex data proportione laterum parallelogrami rectanguli cogniti, utriusqꝫ lateris pendebit noticia.

Sit parallelogramum rectangulum a b c d cognitum, cuius latera a b & a d proportionem habeant adinuicem notā. Dico, ꝙ utrunqꝫ ipsorum notum habebitur. Resumpta enim prima figuratione præcedentis, erit per primā sexti proportio a c parallelogrami ad a p quadratum, sicut lineæ d a ad lineā a q. est autē proportio lineæ d a ad lineā a q data, ꝙ a q æqualis habeatur lineæ a b. quare & proportio parallelogrami a c ad quadratum a p nota redditur. cumqꝫ notum subiecerimus parallelogramum a c, erit per sextā huius & quadratum a p



cognitum. inde quoq; per secundã huius constitutã a b non ignorabitur: quæ quidẽ est alterũ ex lateribus parallelogrami propositi, datã autem tradidit hypothesis proportionem laterum dicti parallelogrami, ex latere igitur a b iã cognito sexta huius, reliquum latus a d suscitabit notum. utrunq; ergo parallelogrami latus effecimus mensuratum, quod pollicebatur præsens theorema. ¶ Opus ita comparabis. Si proportio laterum data est per denominationem, diuide numerum parallelogrami per denominatorem proportionis, & exibit numerus quadrati lateris consequentis, cuius radix quadrata latus ipsum consequens notificabit, postea ad operationem sextæ huius aut præcedentis confugias, quæ reliquũ latus eliciet cognitum. Vt si parallelogramum a c contineat 48 quadratos pedes, latus autẽ a d lateri a b triplum fuerit, ecce denominatorem proportionis 3. per quem diuido numerum parallelogrami 48, & exeunt 16. numerus qui debetur quadrato lateris a b consequentis, cuius radix quadrata 4, latus a b notum faciet. 4 autem triplicans, quoniã proportionem triplã elegimus; aut 48 diuisis per 4, exurget latus a d reliquum 12. Qđ si proportio lateris ad latus data fuerit, non per denominationem, sed per sibi æqualem proportionem, ut si diceretur, proportio lateris a d antecedentis ad latus a b consequentis est, ut 5 ad 3: multiplicabis numerum parallelogrami dati per terminum consequentem, & productũ partieris in numerum antecedentem, exibit enim numerus assignandus quadrato lateris consequentis: cũ quo ut antehac ꝓcedendum erit. Vt si parallelogramũ a c fuerit 60. latus autem a d ad latus a b se habeat, ut 5 ad 3. multiplicabo 60 per 3. producũtur 180. quæ diuisa per 5, eliciunt 36. quadratum scilicet lateris a b, cuius radix quadrata 6, ipsum latus a b notificabit. reliqua autem per operationẽ præcedẽtis absoluenť.

XIX.

Si quatuor quantitatum proportionalium tres quælibet datæ fuerint, & quarta reliqua innotescet.

Sint quatuor quãtitates a b c d proportionales, quarum tres notæ sint quæcunq;, dico, ꝙ quarta reliqua nota ueniet. Quãuis autẽ ipsa ignota quãtitas nunc primum, nunc secundum, interdũ uero reliqua soleat occupare loca, tamen ne operis uarietas, quæ necessario hanc mutationem consequitur, lectorẽ perturbet: placuit semper ignotæ quãtitati postremũ deputare locum. Præsens igitur theorema facile confirmabimus, si prius quo pacto quãtitas ignota, quocunq; nobis offerať loco, postrema fiat docebimus. Constat autem huiusmodi quatuor quãtitatum ꝓportionalitas ex duabus proportionibus, quarũ unius ambo termini sunt cogniti, & illã faciemus primã, secundæ autem ꝓportionis unus duntaxat notus est terminus, qui si fuerit antecedens, iã ordinate sunt quatuor illæ quantitates, ut uolumus, habebit enim ignota quartum locum. Si uero consequens secundæ proportionis notum fuerit, conuertemus ambas proportiões, & trãsferetur ignota quãtitas ad postremũ locũ. Nunc ad confirmationem proportionis descendamus. Quatuor quãtitatum proportionaliũ a b c d, tres primæ sunt notæ secundum tres numeros f g & h, simili ordine positos

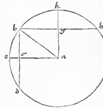


ne positos, ita ꝙ quātitas tertia c, scilicet nota sit per mensuram e secundū numerum h. reperiaturq; numerus k, ad quem se habeat h, sicut f ad g. quod fiet, si productum ex h in g, per numerum f partiemur, quemadmodum ex uigesima septimi elementorū trahitur. erit autem numerus k, secundū quem nota habebit, postrema quātitatū ꝑ mensurā quidē e. Nā, ex quinta huius ꝓportio a quātitatis ad b erit, sicut numeri f ad numerū g. sed a ad b sicut c ad d ex hypothesi, & f ad g sicut h ad k, quare c ad d sicut h ad K, & cōuersim d ad c tanq; k ad h, & c ad mensurā e, sicut h numerū ad unitatē, ꝙ e mēsuret c secundū numerū h. ꝑ æquā igitur ꝓportio d quātitatis postremæ ad e mensurā, tanq; numerū k ad unitatem. est itaq; e mensura in d, quoties unitas in k numero. d ergo quātitas nota redditur per mensurā e secundū numerū k, quod libuit explanare. ¶ Opus, multiplica numerum secundæ quātitatis per numerum tertiæ, & productū in numerum primæ quātitatis diuide, exibit enim numerus postremæ quātitatis quæsitus. Vt si a fuerit 4. & b 9. c uero 12. multiplico 12 per 9, producūtur 108, quæ diuisa per 4, eliciunt 27 numerū uidelicet quantitatis postremæ.

· XX.

In omni triangulo rectangulo, si super uertice acuti anguli, secundū quantitatem lateris maximi circulum descripseris, erit latus ipsum acutum, subtendens angulum sinus rectus conterminalis sibi arcus dictū angulum respicientis: lateri autem tertio sinus complementi arcus dicti æqualis habebitur.

Sit triangulus rectanglus a b c, angulum c rectum habens, & a acutum, super cuius uertice a secundum quātitatem lateris maximi a b, maximo scilicet angulo oppositi describatur circulus b e d, cuius circūferentiæ occurrat latus a c quoad satis est prolongatū in e puncto. Dico quòd latus b c angulo b a c oppositum est sinus arcus b e dictum angulum subtendentis. Latus autem tertium, scilicet a c, æquale est sinui recto complementi arcus b e. Extendatur enim latus b c occurrendo circumferentiæ circuli in puncto d. à punctis autem a quidem centro circuli exeat semidiameter a k æquedistans lateri b c. & à puncto b corda b h æquedistans lateri a c. secabunt autem se necessario duæ lineæ b h & a k, angulis a b h & b a k acutis existentibus, quod fiat in puncto g. Quia itaq; semidiameter a e cordam b d secat orthogonaliter propter angulum a c b rectum, secabit & ipsam per æqualia ex tertia tertij elementoꝝ. & arcum b d per æqualia ex 29. eiusdem. quemadmodum igitur tota linea b d per diffinitionem corda est arcus b d, ita medietas eius, linea scilicet b c est sinus dimidij arcus b e respicientis angulū b a e siue b a c. quod asseruit prima pars theorematis nostri. Secundam deinceps partem ueram cōfiteberis, si prius per 34. primi angulum a g b rectum esse didiceris. semidiameter enim a K, & cordam b h, & arcū eius ex supra memoratis medijs per æqua scindet. quare per diffinitionem linea recta b g sinus erit arcus b K. Est autem linea b g æqualis la



teri trianguli a b c. per 34. primi, ꝙ ſupficies a g b c æquediſtãtibus contineat lineis, angulus uero c a g, ſiue e a k rectus eſt per 29. primi, propter æquediſtantiam linearum b c ad a g, quare per ultimã ſexti arcus e k circumferentiæ ſuæ quadrãs probabitur. arcus itaq; b k complementum ipſius arcus b e diffinietur, cuius ſinus b g lateri a c æqualis nuperrime concludebatur. utranq; igitur proportionis partem ſatis oſtendiſſe uidemur.

XXI.

Omnem angulum rectum notum eſſe oportet.

Vnus enim rectus angulus ad quatuor rectos notã habet proportionem, ſumma autem quatuor rectorum nota eſt, cum gradus unus ſcilicet 360. pars quatuor rectorum; qua tanq̃ menſura famoſa utuntur uniuerſi Geometræ; ſecundũ numerum notum 360. contineatur in quatuor rectis. quare per ſextã huius & unus angulus rectus notus habebitur, quod erat lucubrãdum. Quarta autẽ pars ex 360 eſt 90. Iuſto igitur compuro 90 gradus angulo recto uẽdicabimus. Miraberis forſitan, quo pacto diuerſi generis quãtitates menſura gradualis metiatur. Dicimus enim circumferentiã circuli uel arcum tot uel tot complecti gradus, item quatuor rectos angulos, uel alium angulum quemcunq; aliquot continere gradus. Quid igitur uocabulo gradus ſignificare uelimus, paucis habeto. Menſura famoſa arcuum eſt gradus circumferentialis ſcilicet 360. pars circumferentiæ circuli, menſura autem famoſa angulorum eſt gradus angularis, uidelicet 360. pars quatuor rectorum angulorum, id eſt, ſpacij plani, quod circa punctum quodlibet exiſtit. Imaginãdo enim duas ſemidiametros circuli ſuper puncto quocunq; tanq̃ centro deſcripti; gradum circumferentiæ circuli dicti intercipientes, angulus quem ipſe ſemidiametri ambiunt gradus uocabitur angularis, quoniã angulus ille 360. in quatuor rectis, ſiue toto ſpacio centrum circuli ambiente continetur; ſicut & gradus circumferentialis in tota circumferentia. huius enim anguli ad quator rectos, & illius arcus ad totã circumferentiã, eandem eſſe proportionem, ex ultima ſexti facile comprobabit. ⁋ Trahimus poſtremo ex iam recitatis, ꝙ cuilibet angulo & arcui ſe reſpicienti de circũferentia circuli ſuper uertice ipſius anguli deſcripti, unus & idem ſeruit numerus. uerbi gratia, ſi angulum quemlibet 36 graduũ ſtatuimus, erit & arcus ſe reſpiciens 36 graduum, & econtra. quod quidem ex identitate numeri totius circumferentiæ circuli & quatuor rectorum, ultima ſexti ratiocinante pendere dinoſcitur.

XXII.

Altero duorum acutorum, quos habet triangulus rectangulus, dato, reliquus non latebit.

Duo enim acuti anguli, quos habet triangulus rectangulus, per 32. primi, ualent unum rectum, ꝙ tertius angulus ſit rectus, aggregatũ itaq; ex duobus dictis acutis angulis notum eſt, quoniã ex præmiſſa rectus angulus notus eſt, ſed & alter acutorũ ex hypotheſi datus eſt, quare per quartam huius reliquum cognoſcemus.

⁋ Opus, numeri anguli acuti dati, ex numero unius recti minuas, & relinquetur quantitas alterius. Vt ſi angulus b fuerit 20, minuo 20 ex 90, relinquuntur 70, tantum igitur habebo angulum c reliquum.

Si duo

XXIII.

Si duo latera trianguli, rectum continentia angulum, fuerint æqualia, duo acuti anguli eis oppositi reddentur noti.



Duo latera a c, c b trianguli a b c rectanguli, rectum angulum c ambientia, sint æqualia. Dico, quod uterque angulorum b & c notus prodibit. Erunt enim per hypothesim & quintā primi duo anguli a & b æquales, cumque per 32. primi ipsi ualeant unum rectum, angulo c recto existente, erit uterque eorum medietas per 21 huius cogniti, quare per 6. huius uterque eorum notus habebitur, quod libuit explanare. ☞ Opus. Quantitatem anguli recti dimidiabis, & apparebit utriusque angulorū acutorum quātitas. Verbi gratia. Recto angulo habente 90 gradus, dimidiabo 90, & habebo 45 pro medietate recti, tantusque pronunciabitur uterque angulorum a & b.

XXIIII.

Si latus trianguli rectum subtendens angulum, alteri duorum recto subiacentium fuerit duplum, angulus acutus ab eis contentus, reliquo angulo acuto duplus enunciabitur. Vnde etiam utrunque eorum agnoscet Geometra.

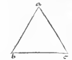


Sit triangulus a b c, rectum angulum c habens quem subtendat latus a b duplum lateri a c. Dico, quod angulus b a c duplus erit angulo a b c. Extendatur enim a c usque ad punctum d, donec c d habeat æqualis lateri a c, ducta linea b d, erit itaque a b linea æqualis ipsi a d; quod utriusque medietas sit a c. sed per quartā primi duæ bases a b, b d triangulorum a b c, & b c d sunt æquales, anguli quoque a b c & d b c æquales. totus igitur angulus a b d duplus est ad angulum a b c. est autem totus angulus a b d æqualis angulo b a d, siue b a c per quintā primi triangulo a b d æquilatero existente. unde & angulus b a c duplus erit ad angulū a b c, quod oportuit demonstrare. ☞ Ex hoc patebit corollarium. Quoniā enim in triangulo nostro angulus a duplus iam declaratus habeatur ad angulum b, id est, sicut 2 ad 1, erit coniunctim aggregatū ex duobus angulis a & b ad angulum b, sicut 3 ad 1. Illud autem aggregatum æquipollet angulo recto, hypothesi & 32. primi docentibus. proportio igitur anguli recti ad angulum b nota est, uidelicet sicut 3 ad 1. quare per sextā huius angulus b notus erit, recto per 21 huius noto existente. postremo etiā residuus ex recto angulus, scilicet a per 4 huius notus declarabit.

XXV.

Duobus trianguli cuiuscunque cognitis angulis, tertium reliquum datum iri.

Trianguli a b c, duo anguli a & b sint cogniti. Dico, quod & angulus c notus emerget. Tres enim anguli a b c, duobus rectis æquantur. 32. primi id confirmāte. duo aūt recti sunt noti per 21 & 3 huius, quare & aggregatum ex tribus angulis tri-

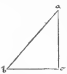


lis trianguli propositi notum habebitur. cumq; duos eorũ datos subiecerit hypothesis, p 4. huius tertius reliquus nõ ignorabitur, quod libuit inferre. ¶ Opus. Summã duorum angulorum, qui dati sunt ex quãtitate duorum rectorum minuas, & relinquetur tertij anguli quantitas desiderata. Vt si angulus a fuerit 20, & angulus b 35 graduũ, collectos 20 & 35 gradus, qui reddunt 55. ex 180 minuo. relicti enim 125 gradus, angulo c adnumerabuntur.

XXVI.

Omnis trianguli rectanguli duobus lateribus cognitis, tertium extemplo manifestari.

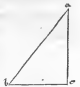
Triangulus a b c angulum c rectum habeat, cuius duo latera quælibet sint nota. Dico, ꝙ reliquum eius latus notum habebitur. Si enim duo latera rectũ continentia angulum offerantur nota, erunt per primã huius quadrata eorum nota. aggregatum quoq; ex eis per tertiã huius notum, quod æquipollet quadrato a b per penultimã primi, unde ipsum notũ, & ideo per secundam huius costa sua, latus scilicet a b non ignorabitur. Si uero alterũ eorum sit datum cum latere rectum subtendente angulum, quadratũ minoris demptum ex quadrato maioris, per penultimã primi & quartã huius relinquet quadratũ reliqui lateris notum, & ideo per secundã huius costa eius cognita orief, quæ fuere lucubrãda. ¶ Opus uulgare. Si latera rectum ambientia angulum fuerint data, quadrabis ea, quadrataq; congregabis, & collecti ex eis radix quadrata quãtitatem lateris quæsiti manifestabit. Si uero alterũ eorum sit datum cum latere rectum subtendente angulum, quadratum minoris ex quadrato maioris demas, & relicti quadrata radix tertium latus notificabit. Vt si latus a c fuerit 12, & b c 5, quadrabo 12, exurgunt 144. itẽ quadrabo 5, ueniunt 25. colligo 144 & 25, fiunt 169. quorum radicem quadratam inuenio 13. tantumq; fore didici latus a b. Sed ponatur latus a b 29, & latus a c 20. duco 29 in se, ueniunt 841. similiter 20 in se, faciunt 400. aufero 400 ex 841. relinquũtur 441, quorum radicẽ quadratã 21 lateri b c deputabo. Ita in cæteris.



XXVII.

Trianguli rectanguli duobus lateribus cognitis, omnes angulos datum iri.

Si alterum datorum laterum recto opponatur angulo, satis est. si uero nõ, per præcedentem ipsum addiscemus, nam absq; eo propositum attingendi nõ erit potestas. Sit itaq; triangulus a b c, angulum c rectum habens, cuius duo latera a b & a c sint data. Dico, ꝙ omnes anguli ipsius noti erunt. Super uertice enim anguli acuti b, quem uidelicet latus subtendit datum tanq; centro, secundum quantitatem lateris b a circulo descripto, erit per 20 huius a c sinus arcus sibi conterminalis, qui respondet angulo a b c quem inquirimus. cũq; duæ lineæ a b & a c inter se datæ sint ex hypothesi per mensurã ueterem, a b autem semidiameter circuli descripti data sit per mensurã nouã, quæ quidem est una partium sinus totius, erit & a c nota per eandem mensurã docente septima huius, dum igitur a b est sinus to-



ſinus totus uel ſinus quadrantis, erit a c ſinus notus, & per tabulã ſinus, qua neglecta, hoc in propſito nihil efficere poſſumus, arcũ eius addiſcemus. cognito autẽ arcu dicti ſinus, dat & angulus quẽ reſpicit arcus ille, nã arcus ipſe & angulus ſecundũ eundẽ numerũ mẽſurant̃, quẽadmodũ tota circũferẽtia & q̃tuor recti anguli ſecundũ eundẽ numerũ cõiter mẽſurãtur, q̃d in 21 huius cõmemorauimus. per 22 itaq; huius reliquũ acutum angulum b a c cognoſcemus. Rectum autem angulum a c b, 21 huius notum demonſtrabat. Vniuerſos igitur trianguli noſtri angulos reddidimus notos, quod decuit explanare.

☞ Opus. Numerũ lateris rectum ſubtendentis angulum conſtitue primum, & numerum lateris reſpicientis angulum quæſitum pro ſecundo ponas, numerũ uero ſinus totius tertium. Multiplica igitur ſecundum per tertium, & productum diuide per primum, exibit enim ſinus arcus reſpicientis angulum quæſitum, cui per tabulã ſinus arcum ſuum elicias, cuius etiã numerus angulum quæſitum manifeſtabit. hunc ſi ex anguli recti quantitate dempſeris, relictum numerabis ſecundum angulũ acutum. Vt ſi a b fuerit 20 a c 12, & b c 16, ſinus autem totus quemadmodũ in tabula noſtra ſuppoſuimus 60000, multiplicabo 12 per 60000, producuntur 720000, quæ diuido per 20, exeunt 36000, huius ſinus arcum tabula præbet gradus 36, & minuta 52 ferè. tantũ igitur pronunciabimus angulum a b c, qui tandem ſublatus ex 90, relinquet 53 gradus & 8 minuta ferè, & tantus habebitur angulus reliquus acutus.

XXVIII.

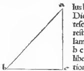
Data proportione duorum laterum trianguli rectanguli, angulos eius percontari.

Aut enim alterum duorũ laterum opponitur recto angulo, aut non. Si primũ ſit latus a b recto angulo a c b oppoſitum, cuius proportio ad latus a c ſit nota, Dico, q; anguli huius trianguli innoteſcent. Eſt enim a c ſinus arcus anguli a b c per huius, dum a b eſt ſemidiameter circuli ſcilicet ſinus totus, proportio ergo ſinus totius ad ſinum anguli a b c nota eſt, hinc ſinus ille notificabitur, & tandẽ angulus a b c non latebit. Si uero proportio duorum laterum b c & a c data fuerit, erit proportio quadratorũ notum data, & coniunctim proportio aggregati ex quadrato b c cum quadrato a c, hoc eſt quadrati a b propter angulum c rectum ad quadratum a c nota erit; unde & linearum proportio non ignorabit̃, reliqua ut ante. ☞ Operatio. Si alterum duorum laterum recto angulo opponatur, multiplica terminũ minorem proportionis datæ per ſinum totum, & productum diuide per terminũ maiorem, exibit enim ſinus anguli, cuius latus breuius opponitur. Si uero duorum laterum recto circumſtantiũ data fuerit proportio, duc utrunq; terminorũ in ſe, & collecti ex productis radicẽ accipe quadratã, ipſa enim erit terminus lateri, quod rectum ſubtendit angulum accomodandus, perduceris ergo ad iter priſtinũ. Vt ſi proportio a b ad a c fuerit ſicut 9 ad 7. multiplico 7 in ſinum rectum totum 60000, fiunt 420000. quæ diuido per 9, exeunt 46667 ferè. arcus autem reſpondens huic ſinui recto eſt gr. 51. minuta 3 ferè, & tantus habebitur angulus a b c. Sed ponatur proportio a c ad c b ſicut 12 ad 5. duco 12 in ſe, fiunt 144. item 5 in ſe, reddunt 25. hæc coniungo, faciunt 169. horum radix eſt 13, attribuenda lateri a b, ſic proportio a b ad a c erit ut 13 ad 12.

unde ut prius angulo a b c cognoscendo uia parata est.

XXIX.

Altero duorum acutorum angulorum, quos habet triangulus rectangulus, cognito, cum uno eius latere & angulos [illegible] & latera metiemur.



Trianguli a b c angulum c rectum habētis, angulus b sit cognitus cū latere uno quocūq; (uerbi gratia) a c. Dico, q̄ omnes eius anguli cum lateribus omnibus innotescent. Anguli profecto cognoscentur ex 21 & 22 huius. restat igitur inuenire latera. Per 20 autem huius & tabulam sinus hypothesi iuuante, erit utrunq; laterum a c & b c cognitum, ut a b est sinus totus, duo itaq; latera quælibet trianguli propositi datam inuicem habebunt ꝓportionem, cumq; ex hypothesi unū eorum datum sit per mēsurā nouam, erunt per 6 aut 7 huius reliqua data, quod libuit attingere. ¶ Opus pulchrū & perutile. Sinum arcus anguli dati, & eius cōplementi addiscas, habebisq; tria latera nota per mensuram ueterem, quæ est pars una sinus totius nam latus rectum subtendens angulum est sinus totus. Si igitur latus, quod rectum subtendit angulum, fuerit datum per mensuram nouam, pone sinum totum pro primo, & sinum arcus anguli, cui opponitur latus quæsitum, pro secundo, numerū autem nouæ dationis tertiū. multiplicatoq; secundo per tertium productum diuide per primum, & exibit numerus lateris quæsiti. Si uero alterum duorum laterum recto subiacentium detur, uolendo mensurare latus rectum subtendēs angulum, pone sinum arcus anguli, cui opponitur ipsum latus datum pro primo, & sinum totum pro secundo, numerum autem dationis nouæ tertium, absolutoq; opere uulgari quatuor numerorū proportionaliū ad metam perduceris cupitam. Quod si reliquū latus recto substratū angulo inuestigaueris, pone sinū arcus anguli, cui opponitur, latus datum pro primo, & sinum complementi eius pro secundo, numerū uero dationis nouæ tertium, reliqua ut antehac executurus. In exemplo. Detur angulus a b c 36 graduū, & latus a b 20 pedū, subtraho 36 à 90, manebunt 54 gradus, qui determinant quantitatem anguli b a c. inuenio autem lineam a c 35267 ex tabula sinus, b c uero 48541, dum a b est sinus totus 60000. Multiplico igitur 35267 per 20, producuntur 705340, quæ diuisa per 60000, eliciūt 11 $\frac{45}{60}$ ferè. latus itaq; a c habebit pedes 11 & $\frac{45}{60}$, id est tres quartas pedis unius. Similiter multiplico 48541 per 20, producuntur 970820, quæ diuido per 60000, exeunt 16 & 11 minuta ferè, tantumq; latus b c pronunciabitur. Quòd si ponatur latus a c 20, reliquis ut antea manentibus, erit iterum a c latus 35267, & b c 48541, dum a b est sinus quadrantis 60000. Ad inueniendū igitur latus a b, multiplico 60000 per 20, producuntur 1200000, quæ diuido per 35267, exeunt 34 & 2 minuta ferè, habebit itaq; latus a b pedes 34 & 2 minuta ferè. Sed libeat mensurare latus b c, multiplicabo 48541 per 20, producuntur 970820, quæ diuisa per 35267, eliciunt 27 & 32 minuta ferè. latus igitur b c 27 & 32 minuta ferè pedis unius complectit̄. ¶ Hic parumper ausculta, quādoquidem opus nostrū Triangulorū Astronomiæ seruit plurimū, quæ fractionibus nō tam uulgaribus q̄ Physicis utit̄, quo pacto fractiones uulgares in physicas cōmutentur, non erit silentio prætereundum. Omni nanq; integrorū absoluta diuisiōe si aliquid de numero diuiso; quod necessario minus inuenietur diuisore; relictum fuerit,

mero duorum rectorum, qui enim relinquitur numerus, angulo, quem basis respicit, deputabitur. Si uero angulus, quem duo æqualia ambiunt latera, notus offeratur, numerum eius à numero duorum rectorum minues, nam relicti numeri medietas utrunq; æqualiũ angulorum patefaciet. In exemplo: Sit angulus b 30 graduum, erit autem & angulus c sibi æqualis 30. hi collecti, reddunt 60. qui sublati ex 180. numero duorum rectorum usitato, relinquũt 120. & tantus erit angulus a. Sed ponatur angulus a 150. minuo 150. ex 180. ualore scilicet duorum rectorũ relinquuntur 30. quorũ medietas 15 utrunq; angulorũ b & c cognitũ efficit.

XXXVI.

Perpendicularem duobus trianguli æquicrurij notis lateribus conterminalem, cui basis nota per medium diuisa substernitur, faciliter indagare.



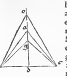
Sit triangulus æquicrurius a b c, cuius basis b c data sit, lateraq; a b & a c cognita, à quorũ cõmuni puncto a ad basim b c descendat perpendicularis a d, cadens intra triangulum, quemadmodũ ex præcedenti & 30. huius concluditur. Dico, q ipsa ꝑpendicularis a d nota uenier. Quoniam enim uterq; angulorũ supra basim apud punctum d rectus est, erit per penultimã primi tam quadratũ lineæ a b æquale duobus quadratis linearum a d & d b, q quadratum a c duobus quadratis linearum a d & d b. sunt autẽ duo quadrara linearum a b & a c æqualia, ꝓpter costas suas æquales, quare & aggregatum ex duobus quadratis a d & d b æquale aggregato ex duobus quadratis a d & d c, dempto igitur cõmuni quadrato a d, relinquetur quadratum b d æquale quadrato d c, unde & linea d b æqualis lineæ d c concluditur. cunq; tota b c nota sit ex hypothesi, erit per sextam huius utraq; linearum d b & d c nota, sunt enim eius medietates. quadratum itaq; lineæ d c per primã huius notum habebitur, sed & quadratum a c per eandem iuuante hypothesi notum est, â quo cum superet quadratum d c in quadrato a d per penultimã primi, si quadratum d c notum abstraxeris, relinquetur per quartã huius quadratum perpendicularis a d notum, & ideo per secundã huius ipsa ꝑpendicularis a d cognita, quod placuit attingere. ☞ Opus. Quadratum dimidiæ basis ex quadrato lateris minuas, relicti enim radix quadrata ꝑpendicularẽ manifestabit. Vt si basis b c fuerit 10. & utrunq; laterum a b & a c 13. quadrabo medietatem basis, quæ est 5. exurgũt 25. item quadrabo numerum lateris scilicet 13. producuntur 169. â quibus postq; 25 dempsero, relinquent 144. pro quadrato perpendicularis a d, quorum radicẽ quadratã 12 perpendicularis sibi uendicabit.

XXXVII.

Quales habeat angulos æquicrurius triangulus, ex cognitis lateribus & basi faciliter indagare.

Qualitatem anguli dicimus rectitudinem acutiem & obtusitatem. Duobus ad hoc iudicijs perducemur, quorũ unũ accipit ex ꝑpendiculari ad basim demissa & basi, aliud uero ex latere & basi. Nam si ꝑpendicularis dimidiæ basi fuerit æqualis, angulus, cui basis opponitur, rectus erit, si uero minor fuerit medietate basis obtusus, & si maior acutus, quorũ demonstrationem breuiter afferemus. Sit enim in triangu-

triangulo æquicrurio a b c perpẽdicularis a d æqualis medietati basis d c, erit itaq; ex processu 23 huius bis assumpto uterq; angulorum d a c, & d a b medietas recti, totus igitur angulus b a c rectus habebitur. Si autem a d perpendicularis minor fuerit medietate basis b c, prolongetur d a in e, donec d e fiet æqualis lineæ d c, ductis lineis e b & e c nouu æquicruriũ triangulum claudentibus per 4 primi, cuius angulus b e c ex recitato processu rectus declarabit̃. unde & per 21 primi angulus b a c maior eo, & ideo obtusus enunciabitur. Sed si perpendicularis a d maior fuerit medietate basis d c, abscindatur ex ea d g æqualis d c, extensisq; lineis b g & g c, probabitur ut prius angulus b g c rectus, qui p 21 primi maior est angulo b a c, angulũ itaq; b a c minorem esse recto, & ideo acutum nemo dubitabit.

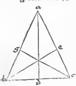


¶ Aliud uero indicium apparebit hoc pacto. Si latus medietati basis potentialiter duplum occurrat, rectus prædicabitur, quem basis subtendit angulus. si uero potentialiter minus q̃ duplum obtusus, & si maius q̃ duplum acutus, quod sic cõstabit. Nã si quadratũ lateris, q̃d suã dicimus potẽtiã, duplũ fuerit quadrato dimidiæ basis, cũ ipsum æqpolleat p penultimã primi duobus quadratis ipsius scilicet ppendicularis & dimidiæ basis, planũ erit quadratũ ppẽdicularis æquari quadrato dimidiæ basis, & ideo ppẽdicularẽ dimidiæ basi. ad prius igit̃ explanata si refugerimus cõstabit angulũ b a c esse rectum. Si uero quadratũ lateris a b minus fuerit q̃ duplũ quadrati dimidiæ basis, erit & aggregatũ ex duobus quadratis linearũ a d & d b per penultimã primi minus q̃ duplũ quadrati b d. unde quadratũ a d minus oportebit esse quadrato b d, & ideo costam huius lineam scilicet a d minorẽ costa illius b d, ex prædictis ergo angulum b a c obtusum esse non ignorabimus. Quod si quadratũ a b maius fuerit duplo quadrati b d, cõcludemus ut nuncnũc fecimus lineam a d longiorem linea b d. quamobrẽ ex supra memoratis in primo indicio angulus b a c acutus explorabitur. Qualis itaq; sit angulus, quem basis subtendit, gemino monstrauimus indicio. utrunq; autem reliquorũ, quos dicta sustentat basis, acutum esse docuit corollarium 34 huius. ¶ Opus uero posteaq̃ ex præcedenti perpendicularem didiceris, ex processu huius facile comparabis.

XXXVIII.

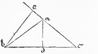
Trianguli æquicrurij siue latus quodcunq; dederis, siue perpendicularem cum uno angulorum, & reliqua latera & perpendiculares mensurabuntur.

Sit triangulus æquicrurius a b c, cuius unum latus quodcunq; sit notũ cum uno angulorum eius. Dico, q reliqua duo latera nota fient cum perpendicularibus. Detur enim primo alterum duorũ laterũ & sit a c, demissaq; perpendiculari a d ad basim b c, erit triangulus a d c rectangulus, cuius angulus c acutus ex corollario 34. huius notus habebitur, siue per hypothesim solam, siue per hypothesim & 34. huius, quare per 28 huius latere a c noto existente, tam linea a d perpendicularis, q̃ d c notæ occurrent, duplicata autem d c nota proueniet basis b c data. latus autem a b cum sit æquale lateri a c, nemini erit ignotum. Sic igitur & latera reliqua



liqua

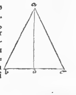
liqua & perpendicularem unam mensi sumus. Qđ si detur basis b c cum aliquo angulorum, erit & eius medietas d c data, habebitq́; triangulus a d c rectangulus notum latus d c, & angulum c acutum cognitum, quare per 29 huius reliqua eius duo latera non ignorabuntur, quorũ unum est perpendicularis a d quæsita, reliquũ uero etiam triangulo æquicrurio proposito commune est. Perpendicularẽ autem b e aut c g basi conterminalẽ, ex 32 huius perpendiculari a d nota existente, faciliter addiscemus. Postremo ex perpendiculari nobis data, cum angulo quocũq; reliqua scibilia depromemus. Det̃ eñ primo ꝑpendicularis a d basi insistens, qua intra triangulum cadet, ut supra confirmauimus, oportet autẽ & angulum c acutum esse notum, siue per hypothesim solam, siue per hypothesim & 35 huius. Triangulus itaq; a d c rectangulus, cum & latus a d notum habeat, & angulum c datum, reliqua sua latera a c & d c, per 29 huius adducet cognita, cumq; d c sit medietas basis, tota quoq; basis b c trianguli ꝓpositi non erit ignota. est autẽ a b æqualis ipsi a c, notæ igitur uenerunt omnes lineæ trianguli ꝓpositi, perpendicularem autem b e aut c g, 32. huius afferet cognitam. Sed si det̃



angulus quicunq; cum altera perpendicularium b e & c g, habebit triangulus b e c latus b e cognitum cum angulo acuto c, & ideo per 29 huius b c linea dabit̃ cum eius medietate d c. Iterum ergo triangulus a d c rectangulus, notum latus d c habens cum angulo c, latus suũ a d, perpendicularem scilicet trianguli æquicrurij ꝓpositi cum latere a c per 29 huius manifestabit. Vna igitur ex lineis memoratis quæcunq; cum unico angulo quicquid in triangulo æquicrurio inquiri solet, apertum efficiet, quod libuit absoluere. ◤ Opus autẽ huius, ne diutius æquo detinearis, missum facimus, quod quidem haud difficulter colligemus, si ad 29 & 32 huius confugerimus.

XXXIX.

Lateribus trianguli æquicrurij cum basi cognitis, omnes ipsius angulos manifestare.



Triangulus a b c æquicrurius duo latera a b & a c nota habeat cum basi b c. Dico, ꝙ omnes eius anguli noti fiẽt. Demissa enim ad d basim ꝑpendiculari a d, erit d c nota, cum sit medietas basis, ut supra cõmemorauimus. duo igitur latera a c & d c trianguli, a d c rectanguli nota sunt, quare per 27 huius angulus eius c, qui & triangulo a b c cõmunis est, notus comprehẽditur. unde & per 35 huius reliqui anguli trianguli a b c propositi non latebunt, quod censebam demonstratũ iri. ◤ Operationes autem 27 & 35 huius, si commisceas opus theorematis præsentis facile conflabis.

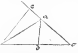
X L.

Si perpendicularem trianguli æquicrurij datam habueris, ex basi nota latus, aut econtra ex latere noto basim elicies.

Sit triãgulus æquicrurius a b c, cuius altera perpendicularium a d & b e, uel c g data sit, Dico, ꝙ si etiam basis b c nota fuerit, latus a c cognitũ erit, & econ-



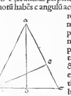
tra, si latus a c uel a b notum fuerit, basis ipsa non ignorabitur. Sit enim primo perpendicularis a d nota cum basi b c, erit itaq; & d c medietas basis cognita, quare per 26 huius a c nota dabitur. Si uero a c latus oscitatur notum, erit per allegatam 26 huius linea d c nota, quae cum sit medietas basis, duplata basim, ipsam constituet. Sit deinceps ppendicularis b e uel c g nota cum basi b c, siue intra siue extra triangulum cadat, duobus itaq; triangulis rectangulis b e c & a d c, angulus c cõmunis erit, quare per 32 primi aequianguli concludentur, & ideo per quartam sexti erit proportio e c ad c d, sicut b c ad c a. tres autem primae harum linearum proportionaliũ notae sunt, e c quidem ex hypothesi & 26 huius, b c ex hypothesi, & d c medietas ipsius b c. quare per 19 huius a c quarta nota ueniet, scilicet latus trianguli aequicrurij quaesitum. Si uero perpendicularẽ b e datam habueris cũ latere a b, erit per 26 huius a e nota. est autem ex diffinitione aequicrurij trianguli a c aequalis ipsi a b, quare & a c nota, & per tertiã aut quartã huius e c cognita. duobus itaq; lateribus b e & e c trianguli b e c rectanguli notis existentibus, erit per 26 huius linea b c nota, basis scilicet trianguli nostri. Quo autem pacto perpendicularis una reliquam suscitare soleat, superius explanatũ est. ¶ In operatione huius non morabimur, quam quidem ex operibus praeallegatarum ppositionum faciliter conflabimus.



XLI.

Vno duntaxat angulo trianguli aequicrurij cognito, utrunq; latus ad basim & perpendiculares, notas habebit proportiones.

Sit triangulus aequicrurius a b c, unum habens notum angulũ quemcunq;, cuius duae perpendiculares sint a d & b e. Dico, q; proportio a c lateris ad basim b c, & ambas perpendiculares nota fiet. Erit eñ triangulus a d c rectangulus, notũ habẽs c angulũ acutũ ex hypothesi sola, aut ex hypothesi & 35 huius, quare per 30 huius proportio a c ad a d perpendicularem nota erit, sed & eiusdem a c ad lineã d c ex eadẽ 30 pportio non ignorabitur. cumq; proportio d c ad c b sit nota, est enim ut medietatis ad totum, erit per 12 huius proportio a c ad basim b c cognita. Sic quo pacto notae fiant proportiones lateris a c ad perpendicularẽ a d & basim b c iam explanauimus. Rursus triangulo a b e rectangulo angulũ a notum habente, aut per hypothesim solam, aut per hypothesim & 35 huius, erit p 30 huius proportio a b lateris ad perpendicularem b e nota. quicquid autem de altero laterum a b & a c praedicamus, & de reliquo cum sint aequalia enunciatum intelligemus. uerum igitur est, quod theorema pposuit.



¶ Operari aũt, si uoles, propositiones theorema nostrũ confirmantes repetito.

In tertio

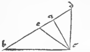
In tertio demum triangulorum genere ludendum censeo.

Tria superius triangulorũ diffiniuimus genera, quorũ primo ab æqualitate laterum sumenti originem modicum accidit uarietatis, in eis quas Mathematici scrutantur rebus. in secundo autem magis uaria est scibiliũ inquisitio, φ ipsum ab unitate simplicitateq; laterum recedat. tertium uero genus, quo amplius à primo distat genere, eo difficilius se offert. In primo præterea genere, omnes anguli, non quidem ad spontaneam positionem tuam, sed necessitate cogniti sunt, unũquenq; enim eorum tertiam partem duorũ rectorum demonstrauimus, uno autem latere quolibet dato, reliqua duo non latebunt, φ ipsa dato lateri sint æqualia. Secundũ uero triangulorũ genus angulos suos non præbet cognitos, nisi aliquid ex angulis suis aut lineis præcognitũ habeatur, quod & in lateribus mensurandis euenire compertum est. Tertij autem generis tanta tamq; uaria est intricatio, ut non satis sit unum angulũ cum uno latere præsciuisse ad reliqua cognoscenda, aut duo eius latera tantũ, uerum ut latera & angulos metiamur uniuersos, aut tria latera præscienda sunt, ad tres angulos reperiendos, aut duo latera cum uno angulo, aut duo anguli cum uno latere. duobus enim angulis datis, tametsi tertius extemplo notus reddatur per 25 huius, non tamen latera nota ueniunt, uerum proportiones ipsorum laterũ duntaxat, quemadmodũ infra docebimus, notas fieri oportet. Postremo in his triangulis absq; notitia duorum casuũ aut alterius eorum, quos perpendicularis ex ipsa basi separat, nihil efficiet Geometra, quæ quidem perpendicularis diuersimode cadere solita, nunc intra nunc extra triangulum, ut supra tetigimus, multiuariam ignotorum faciet inquisitionem. Principio igitur explorandum arbitror, quales sint uniuersi anguli, quos habet propositus nobis triangulus trium datorũ laterum, unde perpendicularis quælibet quo pacto casura sit, dirigẽte 32. huius callebimus, cuius demum perpendicularis quantitatem metiri non prorsus inutile uidebitur.

XLII.

Triangulus notorum trium laterum, qualem quemuis angulum habeat percontari.

Sit triangulus a b c trium inæqualiũ, & notorum inter se laterum, cuius quales sint anguli experiũdum est. Faciamus primo periculũ de angulo a. dico autẽ, φ si quadratũ lateris b c, ipsum angulũ a subtendẽtis, æquale fuerit duobus quadratis laterum a b & a c, quæ dictum ambiunt angulũ, rectus erit angulus ille. si uero minus illis quadratis, erit acutus, & si maius, obtusus, quæ sic constabunt. Si enim quadratum b c æquale reperiatur duobus quadratis a b & a c, erit per ultimam primi angulus a rectus. certum est igitur primũ indicium. Si uero quadratum b c minus fuerit quadratis a b & a c, non potest angulus a esse rectus, neq; obtusus, eo nanq; recto existente, quadratũ b c duobus quadratis a b & a c per penultimam primi æquabitur, quod est cõtrariũ posito. Sed non obtusus. sic enim per 12. secundi quadratũ b c maius duobus quadratis a b & a c habetur, quod cum repugnet posito, relinquitur angulum a esse acutum, & ita secundum firmauimus indiciũ. Quòd si quadratũ b c maius fuerit quadratis a b & a c, nõ poterit angulus a esse re



ctus necꝫ acutus, nam si alterum illorum dixeris, erit quadratum b c, aut æquale duobus quadratis a b & a c per penultimam primi, aut minus eis per 13. secundi, neutrũ aũt horum cum posito stabit, cui igitur dubiũ erit angulũ a obtusum esse? Ad reliquos demũ angulos quales sint, simili pducemur examine. ¶ Operationem ex processu iam facto non potes non comprehendere. In exemplo. Sit latus a b 7, latus b c 9, & latus a c 12, uolo scire qualis sit angulus a, quadrabo singula latera, quadratũ de 7 est 49. quadratũ de 9 est 81. quadratũ uero de 12 est 144. colligo duo quadrata 49 & 144. resultant 193. cum itaqꝫ quadratũ de 9, quod est 81 sit, minus ꝙ 193. pronuncio angulũ a esse acutũ. Ita in cæteris.

XLIII.

Datis tribus lateribus trianguli, duos casus, quos perpendicularis à puncto angulari ad basim descendens, ex ipsa distinguit basi, comperire.

Perpendicularis intra triangulũ manens, duos casus profecto distinguet ex ipsa basi. quæ uero cũ altero laterum coincidit, unum duntaxat casum habebit. perpendiculari autem extra triangulum cadente, casus huiusmodi non sunt portiones basis, uerum basis est pars alterius eorum. Sanè igitur intelligenda erat diffinitio casus ab initio posita. uocabulo enim basis, basim simpliciter dictam, & basim quantũ oportet prolongatam significauimus. Cognitio autem casuũ dictorũ, aut alterius eorum, necessaria est ad perpendicularem trianguli tria latera nota habentis cognoscendam, per quam deniqꝫ perpendicularem anguli quæri solent. Cum autem de his, quæ in triangulis rectangulis quæri solent, superiori loco satis dixisse uideamur, ad triangulos non rectangulos præcepta futura sonabunt potissimũ, licet quædam ad rectangulos etiam applicari possit. Ex puncto igitur a trianguli a b c tria latera habentis nota uersus lineam b c procedat perpendicularis a d, distinguens ex basi duos casus b d & d c, dico ꝙ illi duo casus noti uenient. Qua nanqꝫ lege siue intra siue extra triangulũ cadat huiusmodi perpendicularis



præcedens & 31. huius indicabunt. Cadat itaqꝫ primo intra triangulum duobus angulis b & c acutis existentibus, argumento igitur 13. secundi quadratũ lateris a b superabitũ à duobus quadratis linearũ a c & c b, in eo, quod fit ex b c in c d bis. cũqꝫ tam quadratum a b notum sit ex hypothesi & prima huius, ꝙ aggregatum ex quadratis a c & b c ex hypothesi, prima & tertia huius, erit per quartam huius, quod fit ex b c in c d bis notum, & eius dimidiũ, quod fit ex b c in c d notum. est autem latus b c notum ex hypothesi, quare per 17. huius linea c d nota ueniet, alter uidelicet duorũ casuum, quo dempto ex linea b c nota p hypothesim, reliquus casus b d innotescet. Qd si alter angulorum b & c obtusum se præbeat, perpendicularis a d trianguli aream transiliet, ad partem quidem anguli obtusi, qui uerbi gratia sit c, erit igitur p 12, secundi quadratum lateris a b maius duobus quadratis linearũ a c & c b, in



eo, quod fit ex b c in c d bis. Ex prius igitur adductis locis (ut breuis sim) excessus ille notus erit, scilicet, quod fit ex b c in c d bis, & eius dimidiũ quod ex b c in c d. cumqꝫ b c nota sit ex hypothesi, erit per 17. huius & c d nota, sic minorem duorum casuũ notum efficimus, cui si basim

si basim b c notam adieceris, resultabit casus maior b d notus, quæ fuere lucubranda. ¶ Operatio uaria processum huiusmodi consequitur. Nam si uterq; angulorum, quos basis sustinet, acutus fuerit, deme quadratū lateris uni eorum oppositi ex aggregato duorū quadratorū reliqui scilicet lateris & ipsius basis, quodq; relinquetur, dimidiatū in basim partiaris, exibit enim casus, qui eft apud angulum acutum prædictū, quem ex basi minuendo, reliquū habebis casum. In exemplo. Ponat quis mihi latus a b 20. pedum, b c 21. & a c 13. monitu præcedentis utrunq; angulorū b & c acutum esse conijcio. quadrabo igitur a b, fiunt 400. quadratū autem a c, quod est 169. coniungam quadrato b c, quod est 441. & resultabunt 610. à quibus demo quadratū a b, manent 210. quorum dimidiū 105. diuido per 21. exeūt 5. & tantus est casus d c, aufero 5 ex 21 numero basis, manēt 16 pro casu reliquo. Quòd si alter angulorum prædictorū obtusus extiterit, à quadrato lateris obtusum subtendentis angulum subtrahe aggregatū quadratorum reliqui lateris & basis ipsius, quodq; remanebit, dimidiatū per basim partire, exibit enim casus minor, cui postea q; basim adijciemus, emerget casus maior. Ponatur in exemplo a b 51. b c 38. & a c 25. erit igitur angulus c obtusus, quadrabo a b, ueniunt 2601. quadrabo b c, exurgunt 1444. item quadratum a c est 625. colligo duo quadrata b c & c a, resultant 2069. quæ dempta ex quadrato a b, relinquunt 532. quorum dimidiū 266 diuido per b c scilicet 38. exeunt 7. & tanta est linea c d, casus uidelicet minor, cui adiungo basim 38. congregantur 45 pro casu maiore.

XLIIII.

Quod præcedens docuit, alio tramite inuestigare.

Trianguli a b c tria latera supponantur nota, à b quidem longius latere a c, perpendicularis autem a d cadat intra triangulū super basim b c, erit itaq; casus b d maior casu d c ex hypothesi, penultima primi & cōmuni animi conceptione, sit igitur e d æqualis ipsi d c ducta linea a e. Cum autem per penultimā primi quadratū a b æquipolleat duobus quadratis a d & d b, quadratum uero a c duobus quadratis a d & d c, quadrato perpendicularis a d communi ablato, erit per cōmunem scientiam differentia quadratorum b d & d c æqualis differentiæ quadratorum a b & a c. duo autem quadrata linearum a b & a c nota per hypothesim, ex quarta huius notam habebunt differentiam, quare & differentia quadratorū b d & d c non ignorabitur, sed per sextam secundi quadratū b d æquatur ei, quod fit ex e b in b c cum quadrato e d. differentia igitur quadratorum b d & e d siue d c est id, quod fit ex e b in b c, erat autem hæc differentia nota, quare quod fit ex e b in totam b c notum declarabitur. cumq; ipsam b c notam attulerit hypothesis, erit per 17 huius ipsa b e nota, quam basi b c cognita dementes, lineā e c relinquemus cognitam & eius medietatem d c, quæ est casus minor. huic cum sit æqualis lineæ e d, si adiecerimus b e prius notam, casum maiorem b d scitum reddemus. Quòd si perpendicularis aream trianguli egrediatur, continuata basi b c, donec concurret cum perpendiculari in puncto d, ponatur ipsi c d æqualis d e. pristino igitur fretus argumento, confiteberis differentiam quadratorū a b & a c æqualem esse differentiæ quadratorū b d & d c, quam quidem differentiam hypothesis, prima & quarta huius latere non sinunt. quadratū autem b d superat quadratum c d,





per 6. secundi in eo, quod fit ex c b in totã b e. quod igitur fit ex c b in totam b e, notum habebitur, est autem ipsa b c data per hypothesim, quare per 17. huius tota b e cognoscetur, ex qua si dempseris basim b c datam, residua c e nota uidebitur, cũ eius medietate c d. casum itaque c d minorem enisi sumus, cui si basim adiunxeris datam, casus maior b d mensuratus emerget, quod decuit explanare. ◪ Operatio. Subtrahe quadratum lateris minoris a quadrato maioris, relictóque diuiso per basim, quod exibit ab ipsa basi minuas, si perpendicularis intra triangulũ ceciderit, aut ab eo quod exibit basim demas, si extra ceciderit, eius autẽ quod relinquitur dimidiũ, pro casu minori teneto, cui si id, quod ex diuisione elicitum est, sociaueris, casum maiorem congregabis, perpendiculari quidem intra triangulũ cadente. sed si extra ceciderit, casum minorem cum basi summabis, resultabit enim casus maior quæsitus. In exemplo. Sit latus a b 20. a c 13. & basis b c 21. quadratũ de 13. est 169. quadratũ de 20. est 400. subtraho 169. à 400. manent 231. quæ diuido per 21. exeunt 11. hæc sublata ex 21. relinquũt 10. medietas de 10. est 5. tantumque minorem pronuncio casum, cui adiectis 11. collige 16. pro casu maiori, hæc dum perpẽdicularis intra. Sed extra offeratur latus a b 51. a c 25. & basis b c 38. quæ quidẽ perpẽdicularẽ extra triangulum cadere significant. subtrabo quadratum de 25. quod est 625. ex quadrato de 51. scilicet 2601. manent 1976. quæ diuisa per 38. eliciunt 52. à quibus demo 38. manent 14. quorum medietatem scilicet 7. casui minori deputabo. collige 7 & 38. resultant 45. tantũ igitur maiorem enunciabo casum.

◪ Quod sub differentia laterũ & congerie cõmuni continetur, æquum est ei, quod sub differentia casuum atque congerie eorum, scilicet ipsa basi continetur rectangulũ.

XLV.

Huiusmodi casus per alia media numerare.

Sit triangulus a b c non rectangulus trium notorum laterum inæqualium, a cuius puncto angulari a demittatur perpendicularis a d supra basim b c trianguli superficiem non transgrediens, quæ ex basi b c duos separet casus b d & d c, quorum alterũ altero maiorem esse in præcedenti conclusimus, propter inæqualitatem laterum a b & a c, hos casus mensurandos præstolamur. Super puncto a tanque centro secundum quantitatem lateris minoris a c describo circulũ h e c, cuius circumferentia necessario secabit & basim b c, & latus a b, quod a c linea longior sit perpendiculari a d, breuior autẽ latere a b, secet itaque basim b c in puncto e, quo cum centro circuli copulabo per lineã e a, lineam uero a b secet in puncto h. extendã deinceps b a ultra centrum circuli, donec occurret circumferentiæ eius in puncto g, erit igitur linea e d per tertiam tertij æqualis d c casui minori, & ideo linea b e est differentia casuum. Quoniã autem à puncto b extra circulum signato, duæ lineæ b g & b c productæ circulũ secent, erit per 35 tertij, quod fit ex g b in b h æquale ei, quod ex c b in b e, sed quod fit ex g b in b h, notum est per 16 huius, linea enim g b nota est cum sit æqualis duobus trianguli lateribus a b & a c per hypothesim datis, sed & b h differentia scilicet duorum laterum scita est per hypothesim & quartam huius



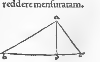
tam huius. quare & quod sub c b & b notum habebitur, cumq; lineam b c notã subiecerit hypothesis, erit per 17 huius linea b e nota, differentia scilicet casuum, qua dempta ex basi b c nota, relinquetur linea e c cognita, cuius medietas d c est casus minor. Item casui dicto minori lineam b c notam adijcias, & prodibit casus maior. Si uero perpendicularis extra triangulum ceciderit descripto circulo super capite ipsius perpendicularis secundũ quantitatẽ lateris minoris cõtinuet latus longius ultra centrum circuli, donec obuiabit circumferentiæ circuli in puncto g, quẽadmodum supra fecimus. Extendatur denique basis, ut in ea residere possit perpendicularis demissa, cõueniantq; perpendicularis ipsa & basis prolongata in puncto d. non tamen ibi sistat, sed procedat quousq; offendet circuli circũferentiã in puncto e, ducta semidiametro a e. pristino igitur freti syllogismo declarabimus quod fit ex e b in b c notum. cũq; ex hypothesi notam habeamus basim b c, erit per 17. huius linea e b (summa uidelicet duorũ casuum) nota: dempta ergo basi b c nota per hypothesim ex b e iã inuenta, residua c e nõ erit ignota. & eius medietas c d, casus scilicet minor. Item si basim b c casui minori iam noto adiunxerimus, casus maior b d notus constabitur, quæ fuere depromẽda. ¶ Operatio. Aggregatum ex duobus lateribus per differentiam eorũ multiplica, productoq; p basim diuiso, quod exibit à basi subtrahas perpendiculari intra triangulũ cadente. aut basim ex eo quod diuisione facta elicitur minuas. residui enim dimidiũ erit casus minor quæsitus, cui si id quod ex diuisione elicitum est, addideris perpendiculari intra cadente, aut ei basim adieceris, si extra ceciderit perpẽdicularis, casum maiorem constitues. Verbi gratia. Sit latus a b 25. a c 17. & basis b c 28. congregabo 25 & 17, resultabunt 42. differentia duorũ laterũ est 8. multiplico igitur 42 per 8, producuntur 336. quæ diuido per 28. numerum scilicet basis, exeunt 12. subtraho 12. ex 28. manent 16. quorũ medietas est 8. Casus ergo minor erit 8. Itẽ addo 12. ad 8. ueniunt 20. & tantus habebitur casus maior. In hoc exemplo oportuit perpendicularem cadere intra triangulum. Sed offeratur mihi latus a b maius 20. a c 13. & basis 11. quo fit ut perpendicularis a d triangulũ egrediatur. Summa duorũ laterum est 33. differentia eorũ est 7. multiplico 33. per 7. producuntur 231. quæ diuido per 11. numerum scilicet basis, exeunt 21. à quibus minuo 11. manent 10. medietas de 10 est 5. tantusq; numerabitur casus minor. Item congregabo numerum basis 11. cum casu minori 5. redduntur 16. pro casu maiori. Triplicem igitur huiusmodi casus metiendi artem absoluimus. Nunc quid utilitatis ipsi afferant paucis lucubrabimus.



XLVI.

Perpendicularem à quouis puncto angulari ad oppositum sibi latus protensam ex notis tribus trianguli lateribus reddere mensuratam.

Sit triangulus a b c, ex cuius puncto angulari a descendat perpendicularis a d ad basim b c, si intra triangulum ceciderit, aut ipsi basi quantũ oportet continuatæ occurrens, si extra triangulum prosiliet. Di-

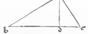


liet. Dico, ꝙ ipſa perpendicularis a d nota ueniet. Nam huiuſmodi perpendiculari deſcendente concludentur duo trianguli rectanguli, latus commune habentes, ipſam ſcilicet perpendicularem, quorum ſiniſter ſiniſtrũ trianguli propoſiti latus, & caſum ſiniſtrum pro lateribus duobus reliquis accipit, dexter autẽ latus dextrũ cum caſu dextro, quemadmodũ in figura apparet. per 26. igitur huius, quae ex penultima primi pendet, perpendicularis a d nota ueniet, latere a b noto exiſtente per hypotheſim, caſu autem b d per quamlibet trium præmiſſarum. Idem efficies ſi triangulo a d c rectangulo uſus fueris. ◤ Opus breue. Quadratum alterius duorũ caſuum ex quadrato lateris ſibi cõterminalis minue, relicti enim radix quadrata perpendicularem quæſitam manifeſtabit.

XLVII.

Si quis trianguli tria latera habuerit cognita, trium eius angulorum addiſcet quantitates.

De triangulis non rectangulis ſermo futurus habebitur, de rectangulis enim ſuperius ſatis dixiſſe uidemur. Sint itaq; trianguli a b c tria latera nota, dico, ꝙ tres eius anguli non latebunt. Demittatur enim ex puncto a ad baſim b c ꝑpendicularis a d, quæ cadat, ne intra triangulum an extra ſuperiores docuerunt. Cadat primo intra triangulum, erit autem ipſa nota ꝑ præmiſſam. triangulus igiť a d c rectangulus duo latera a d & a c nota habens, per 27. huius angulos ſuos acutos manifeſtabit. Similiter triangulus rectangulus a b d notos habebit acutos angulos. duobus autem angulis b & c cognitis, qui triangulis dictis rectangulis & propoſito noſtro triangulo a b c cõmunes ſunt, tertius angulus b a c per 25. huius non ignorabitur. omnes ergo angulos trianguli a b c notos effecimus. Cadat demum perpendicularis a d extra triangulum, argumentis igitur priſtinis duo anguli a b d & a c d noti declarabuntur. cunq; ex 13 primi duo anguli a c d & a c b duos rectos notos, per 21 & 3 huius ualeant, erit per 4 huius & angulus a c b cognitus, unde per 25. huius angulus b a c non ignorabitur. Poteris autem hæc breuius concludere, ſi loco perpendicularis duos caſus acceperis. Nam propter duo latera a b & b d nota ex hypotheſi, & aliqua trium concluſionũ, quas de caſibus numerandis tradidimus, per 27 huius notus erit angulus b, ſimiliter propter latus a c notũ ex hypotheſi, & caſum d c ſuperius numeratum, angulus c patefiet, duo autem anguli b & c cogniti, ſocium ſuum angulum a per 25 huius ſuſcitabunt. ◤ Ne autem æquo diutius obtundaris, operationem duabus ex rebus colliges, nam perpendicularem ex præmiſſa, aut utrunq; duorum caſuum ex aliqua trium præcedentium numerabis. angulos autem triangulorum partialium rectangulorum, qui & triangulo ꝓpoſito cõmunes habentur, 27 huius non ſinet ignotos, qui tandem 25 huius dirigente, tertium angulum elicient menſuratum.





XLVIII.

Duobus trianguli notis angulis, laterum proportiones inuicem cognitum iri.

Trian-

Trianguli a b c duos angulos supponamus datos. Dico, quod quorumlibet duorum laterum proportio nota uidebitur. A communi enim termino duorum laterum, quorum proportionem eniti uoles, demitte perpendicularem uersus reliquum latus, quae cadat ne intra an extra triangulum ex angulis, quos basis sustentat, facile doceberis, illud autem processum nostrū non uariabit, erit enim trianguli partialis a b d rectanguli angulus b notus ex hypothesi, iuuante 25 huius, si opus fuerit, quare per 30 huius proportio a b ad a d nota accipietur. simili argumento proportio a c lateris ad eandem perpendicularem nota declarabitur. utrocque igitur laterum a b & a c ad perpendicularem a d proportionem habente, erit per 12. huius eorum inter se proportio nota. Similiter procedemus circa duo latera quaecunque elegerimus, quod erat absoluendum. ¶ Operationi autem immorari non est consilii ipsam enim ex operibus allegatorum theorematum facile comparabimus.

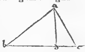


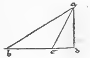


XLIX.

Si duo latera trianguli data notum ambiant angulum, reliquos angulos residuumque latus dimetiri.

Sint duo latera a b & b c trianguli a b c, nota cum angulo quem ambiunt a b c. Dico, quod latus a c notum erit cum duobus angulis reliquis. Demittā enim a uertice anguli ignoti perpēdicularem ad latus sibi oppositum, quae uerbi gratia sit a d. nondum autem ex hypothesi nostra scire poterimus, cadat ne perpendicularis illa intra triangulum an extra, hoc enim non statim consequitur noticiā anguli, quem duo data ambiunt latera, nihilominus metam attingemus cupitam, & qua lege perpendicularis ipsa incedat explorabimus. Cum igitur triangulus a b d rectangulus angulum b acutum habeat datum ex hypothesi cum latere a b, erit per 29 huius utraque linea rum a d & b d cognita respectu lateris a b. si itaque b d iam inuēta per syllogismū minor reperietur basi b c nota per hypothesim, perpendicularem intra triangulum cadere nemo dubitabit. si uero maior fuerit basi b c, cadet extra, & si aequalis, coincidet perpendicularis a d cum latere a c, eritque propter hoc triangulus a b c rectangulus. Sit ergo b d casus primo minor basi b c data, quo ablato ex b c nota, relinquetur per 4 huius linea d c cognita. cumque iam pridem a d perpendicularem notam concluserimus, habebit triangulus a d c rectangulus duo latera a d & d c nota, quare per 26 huius latus eius a c notū elicietur, quod & triangulo nostro cōmune est, sed & angulus eius acutus a c d argumento 27 huius inuenietur. duobus autem angulis b & c cognitis, tertius angulus a per 25 huius latere non poterit. Quod si linea b d maior occurrat basi b c, dempta ipsa basi nota per hypothesim ex linea b d inuenta per argumentationem, manebit c d nota, deinde ut prius linea a c nota prodibit cum angulo a c d, quem si ex duobus rectis abstuleris, relinquetur per 13 primi & 4 huius angulus a c b cognitus, tandemque ex 25 huius angulus





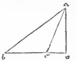
F a men-

a mensuratus emerget, quæ fuere lucubranda. ¶ Operationis uero tenorē missum facimus, qui ad allegata theoremata confugienti ultro se ingeret.

L.

Si alterum ex duobus notis lateribus trianguli, angulo obtuso dato opponatur, & latus & angulos reliquos non ignorabit Geometra.

Duo latera a b & a c trianguli a b c nota sint, quorum alterum scilicet a b opponatur angulo a c b obtuso dato. Dico, q̃ & latus b c cognitum ueniet cū duobus angulis a & b. Ex termino enim communi datorum laterū descendat perpendicularis a d, concurrens cum basi b c, quantum oportet prolongata in puncto d, ipsam enim extra triangulum cadere cogit 31 huius. Triangulus itaq; a c

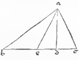


d angulum a c d notum habebit, ipse enim a c d angulus cum angulo a c b per hypothesim noto duobus rectis æquiualent, cūq; latus a c trianguli rectanguli prædicti notū sit ex hypothesi, erit per 29 huius utraq; linearum a d & d c nota respectu lineæ a c. item triangulus a b d rectangulus duo latera a b & a d nota habens, a b quidem per hypothesim, a duero per argumentationē iam factam, ex 26 huius & 27 latus suū b d notum afferet cum angulo b, quare dempta c d prius cognita ex tota b d iam nota, relinquetur basis b c nō ignota. duo autem anguli b & c trianguli a b c, tertium angulū a per 25 huius excitabunt. Verum igitur enunciabat theorema nostrum. ¶ Operationem ex eis, quæ circa triangulos rectangulos tradidimus, facile colligemus.

LI.

Trianguli duo latera data cum angulo acuto, cui alterum eorum opponitur, ad latus & angulos reliquos cognoscendos nequaq̃ sufficere. Verū qua lege perpēdicularis cadat, si callebimus, oīa patefient.

In hac re accusanda uenit infirmitas anguli acuti, qui nequit docere cadat ne perpendicularis intra triangulum propositum an extra, quod obtusus angulus in præmissa indicabat. Nam sit triangulus a b c, cuius duo latera a b quidem maius, & a c minus sint data cū angulo b acuto, sitq; angulus c acutus non datus, & à puncto a demittatur a d perpendicularis ad basim, quæ per



31 huius cadet intra triangulum. ex processu autē 45 huius, casus b d maior erit casu d c, abscindatur ergo ex b d linea e d æqualis ipsi d c, ducta linea a e, quæ per quartā primi æqualis erit lineæ a c. Quāuis itaq; latera a b & a c trianguli a b c data sint, & æqualia duobus lateribus a b & a e trianguli a b e, angulus autē b datus communis ambobus triangulis, tamen bases eorum uarie sunt & reliqui anguli. Ad præcognitionem igitur duorū laterum & unius anguli acuti, cui alterū eorum opponitur, non ligatur noticia reliqui lateris & angulorū reliquorum, quod pollicebatur theorema nostrum. ¶ Vt autem latus & angulos reliquos agnoscamus, præsciendum est, qua lege perpendicularis à communi termino datorum laterum exorta cadat. Si enim intra triangulum ceciderit, triangulus a b d

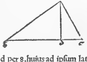
rectangulus

rectangulus habebit latus a b notum ex hypothesi cum angulo acuto b, quare per 29 huius tam perpendicularis a d nota uidebitur, quam casus b d. Ex duobus autem lateribus a d & a c notis, trianguli a d c rectanguli per 26 & 27 huius linea d c inuenietur cum angulo c. duas igitur lineas b d & d c iam singulatim notos, si congregabimus, tota basis b c per 3 huius mensurata ueniet. duo etiam anguli b & c noti tertium angulum a 25. huius dirigente, cognitum elicient. Quod si perpendicularis a d extra triangulum ceciderit, oportuit angulum a c b esse obtusum, præmissam igitur consulendo, & basim b c & angulos reliquos trianguli nobis propositi metiemur. ¶ Opus autem cum & facile sit, & ex superioribus pendeat, missum facio.

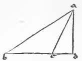
LII.

Si latus trianguli datum duos sustentet notos angulos, reliqua duo latera non erunt ignota.

Sit triangulus a b c, latus a b datum habens, cui insideant duo anguli a b c & b a c noti. Dico, quod duo eius latera reliqua fient cognita. Pro angulo autem tertio mensurando, non est terendus dies, quem 25. huius exemplo notũ afferet. Ab a termino lateris a b dati exoriatur perpendicularis ad basim b c ignotã, quæ cadatne intra triangulum an extra anguli, quibus subiacet basis, per 31. huius edocebunt. Cadat igitur prius intra triangulum, triangulus itaque a b d rectangulus angulum b acutũ habens datum cum latere a b per 29. huius, reliqua duo latera sua a d & d b cognita afferet respectu lateris a b. item triangulus a d c rectangulus cum latus a d iam notum habeat, pari ratione sua latera a c & c d, manifestabit respectu perpendicularis a d notæ. cumque perpendicularis a d



data sit ad latus a b, erit & utraque linearum a c & a d per 8. huius ad ipsum latus a b data. latus ergo a c trianguli propositi notum effecimus cũ duobus casibus b d & d c. quibus collectis b c basis cognita resultabit. Sed cadat perpendicularis a d extra triangulum, eritque per media prætacta trianguli rectanguli a b d utrunque latus a d & d b notum respectu a b. item triangulo a c d rectangulo angulum a c d notum habente propter duos angulos b a c & a b c notos ex hypothesi, quibus ipse per 32. primi æquipollet, cũ latere a d, per 29. huius, reliqua duo sua latera a c & c d cognita habebunt. Sic ergo latus a c trianguli a b c propositi notũ erit



cum duobus casibus b d & d c, quorum minor ex maiore demptus relinquet basim b c notã, quod uolebamus explanare. ¶ Operatio autem ex allegatis comparabitur theorematibus.

LIII.

Latus trianguli notum, quod alteri duorum datorum angulorum opponitur, reliqua suscitabit latera.

In triangulo a b c latus a b notũ angulo a c b dato opponatur, sitque angulus a b c datus. Dico quod reliqua duo latera non erunt ignota. De angulo autẽ ter



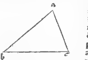
tio, quemadmodum in præcedenti, nihil ambigui nos uexabit. Lateri duobus datis subiacenti angulis insistat perpendicularis a d ex puncto angulari sibi opposito sumens originem, quæ qualiter cadet anguli dati 31. huius commonente exploratũ reddent. Cadat igitur primo intra triangulũ, ut fiat triangulus a b d rectangulus, qui cũ habeat latus a b notum cum angulo a b d acuto, habebit & latus c d cognitum cum latere suo c d, 29. huius dirigente. Similiter triangulus a d c, cum & latus a d iam notum habeat, & angulũ a c d ex hypothesi datũ, duo latera sua reliqua a d & d c manifestabit. omnes igitur lineas b d, a d, a c & d c mensura una, per quã a b nota supponebatur, secundũ numeros metietur notos, quare etiã linea b c ex duabus b d & d c notis resultãs non erit incognita. Sed cadat perpendicularis a d extra triãgulum concurrens cum basi b c, quãtum sat est continuata. Cum itaq; angulus a b c notus supponatur cum latere a b, erit per 29. huius triãgulo a b d rectangulo existente, utraq; linearum a b & d b nota. Rursus in triãgulo a d c rectangulo, cum latus a d iã sit notum, angulus autem a c d propter uicinum suũ a c b ex hypothesi notum 13. primi arguente, notus habeatur, erit per 29. huius utraq; linearum a c & c d respectu lineæ perpendicularis a d, & ideo respectu a b cognita. postq; autem lineã c d ex d b minuemus, relinquetur basis b c cognita. reliqua igitur trianguli a b c latera, noticiæ nostræ subiecimus, quod expectabatẽ ostendendum. ¶ In his autem postremis conclusionibus operationem missam facere libuit, ne sermone obtunderemus nimio, quã quidem operationem, si colligere uoles, ad 26. 27. & 29. huius refugias.



LIIII.

Trium laterum trianguli inter se datis proportionibus, omnes eius angulos mensurare.

Latus a b trianguli a b c, tã ad latus eius a c, q̃ ad b c proportionem habeat datã. Dico, q; omnes anguli eius noti fient. Pro libito enim ipsum latus a b in q̃tlibet partes scindas, quarum una hoc in proposito mensura communis habebitur. cum itaq; a b latus sit notum per mensurã huiusmodi, erunt per 6. huius reliqua duo latera nota per eandem mensurã, & ideo per 48. huius triãguli a b c omnes anguli patefient, quod erat ostendendum. ¶ Operatio autem huius, postq; unum latus quodcunq; tanq; numerum notum pro libito posueris, & reliqua inde latera per opus sextæ huius didiceris, ab operatione 48. huius nõ discrepat.

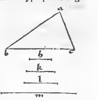


LV.

Tribus angulis trianguli cuiuslibet datas, inter se proportiones habentibus, unusquisq; eorum cognitus habebitur, latera quoq; inter se proportiones accipient notas.

Sit trian-

Sit triangulus a b c, cuius tres anguli inter se proportiones habeāt datas. Dico, q̧ quilibet eorum notus erit, proportionesq̧ laterum inter se datas fieri oportebit. Quoniā enim anguli a ad angulum b data est proportio, sit ipsa ut numeri h ad numerum k (necesse em̄ est eā in numeris notis inueniri) & ꝓportio anguli b ad angulum c nota. tanq̧ numeri k ad numerum l, cum itaq̧ proportio anguli a ad angulum b, sit sicut numeri h ad numerum k, erit coniunctim a & b angulorum ad angulum b sicut h & k numerorum ad k numerum, est autē b ad c sicut k ad k. per æquā igit̄ a b ad c tanq̧ h k ad l, & coniunctim a b c ad c sicut h k l ad l. aggregati itaq̧ ex tribus angulis a b c ad angulum c est sicut aggregati ex tribus numeris h k l ad numerum l proportio. summa igitur trium angulorum a b c ad ipsum angulum c proportionē habet notā, summa autem huiusmodi per 32. primi duobus rectis æquipollet, quos oportet esse notos ex supradictis, unde & summa trium angulorum dictorum nota conuincitur, per sextam ergo huius angulus c notus declarabitur, qui cum ad reliquos angulos datas habeat proportiones, erunt & reliqui anguli p̄ 6. huius noti. quare per 49. huius tria latera trianguli a b c proportiones inter se notas accipient, ambas ergo theorematis partes satis ostēdisse uidemur



¶ Operatio. Tribus angulis tres accomodabis numeros, ita q̧ primus angulus ad secundum se habeat sicut numerus primus ad secundum, secundus uero angulus ad tertium, sicut secundus numerus ad tertium, quod facile fiet, si operationem 19. huius consulueris, quo facto, summabis dictos tres numeros, & collectum ex eis numerum pro primo statuas, numerum uero anguli, quem nosse desideras, pro secundo, & numerum duorum angulorum rectorum pro tertio. multiplicando itaq̧ secundum per tertium, & diuidendo in primum, exibit quantitas anguli quæsiti. Vt si proportio anguli a ad angulum b fuerit sicut 10 ad 7. anguli autem b ad angulum c sicut 7 ad 3. colligo tres numeros 10. 7. & 3. fiunt 20. pro primo numero. libeat autem inuenire angulum a, cuius numerus est 10. quem pro secundo, numerus autem duorum rectorum usitatus est 180. multiplico igitur 180. per 10. producuntur 1800. quæ diuido per 20. exeunt nonaginta. angulum igitur a inuenio 90. gradus continentem, ut duo recti sunt 180. quare & ipse rectus habebitur. Repertis autem angulis ad operationem 49. huius confugiendum erit, ut proportiones laterum addiscamus.

LVI.

Data proportione duorum laterum, unoq̧ angulo cognito, reliqui duo anguli noti fiēt. Vnde utriusq̧ dictorum laterum ad tertium proportio non latebit.

Sit proportio a b lateris ad b c latus trianguli a b c data, cum uno angulo quocunq̧. Dico, q̧ reliqui duo anguli noti uenient, & proportio utriusq̧ dictorum laterum ad tertium latus data erit. Diuiso enim ad libitum latere a b in quotlibet partes, una earum tanq̧ mensura communi utemur, quæ quoties in latere b c contineatur, sexta huius edocebit.



duo igitur latera a b & b c inter se data habebuntur, cunctiq; angulus unus quicunq; per hypothesim datus sit, erit per 50. 51. aut 52. huius reliquum latus cognitum, quare per diffinitionem laterum omniũ inter se proportiones habebimus datas, sed & per easdem reliqui anguli mensurabunt̃, quod intendebamus cõcludere.

¶ Operationem ex allegatis comparabimus locis, si prius alterum duorum laterum tanq; notum constituerimus.

LVII.

Datis proportionibus duorum angulorum, utriusq; uidelicet seorsum ad rectum angulum, unoq; latere quolibet cognito, omnes anguli cum reliquis lateribus cognoscentur.

Vtriusq; duorum angulorum a & b ad rectum data sit proportio, sitq; latus a b aut aliud quodcunq; cognitum. Dico, q omnes anguli trianguli a b c noti fient cum lateribus. Erit enim per sextam huius uterq; dictorum angulorum cognitus, recto per 21. huius noto existente, quare per 53. & 54. huius, quod reliquũ est, absoluemus. ¶ Operationi autem nihil loci damus, q ipsa ex supradictis facile decerpatur.



F I N I S.

LIBER SECVNDVS TRIANGVLORVM.

I.

In omni triangulo rectilineo proportio lateris ad latus est, tanq; sinus recti anguli alterum eorum respicientis, ad sinum rectum anguli reliquum latus respicientis.

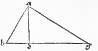
Sinum anguli, ut alibi uocamus, sinum arcus angulum ipsum subtendentis. Sinus autem huiusmodi ad unam & eandem circuli semidiametrum, siue ad plures, æquales tamen, referri oportebit. Sit igitur triangulus a b g rectilineus. Dico, q proportio lateris a b ad latus a g est ut sinus anguli a g b ad sinum anguli a b g, item lateris a b ad b g tanq; sinus anguli a g b ad sinum anguli b a g. Si enim triangulus a b g fuerit rectangulus, ex 28 primi huius comparabimus demonstrationem. Si uero non fuerit rectangulus, duo tamen latera a b & a g fuerint æqualia, erunt quoq; duo anguli eis oppositi, & ideo sinus eorũ æquales, unde de ipsis duobus lateribus propositionem nostram uerificari constat. Quòd si alterum altero longius extiterit, sit uerbi gratia a g lõgius, dirigaturq; b a usq; ad d, donec tota b d æqualis habeatur lateri a g; deinde super duobus punctis b & g factis centris, describi intel-



bi intelligantur duo circuli æquales secundum quantitates linearum b d & g a, quorum circumferentiæ occurrant basi trianguli in punctis l & e, ita, ut arcus d l quidem angulum d b l siue a b g, arcus autem a e angulum a g e siue a g b subtendat: ex duobus demum punctis a & d duæ perpendiculares a k & d h bæsi incidan[illegible]autem ꝙ d h est sinus rectus anguli a b g, & a k sinus rectus anguli a g b. est autem per 4. sexti Euclidis proportio a b ad b d, & ideo ad a g sicut a k ad d h. quare certum est, quod asserebat propositio.

II.

Cognito aggregato ex duobus lateribus trianguli, cũ duobus angulis sibi oppositis, unumquodq; trianguli latus secernere.



Triangulus a b g congeriem duorum laterũ a b & a g habeat datam, & utrunq; angulorum a b g & a g b notum. Dico, ꝙ tria latera eius inuenientur. Erit enim ex præcedenti proportio a b lateris ad latus a g cognita propter angulos datos, & ideo cõiunctim proportio b a & a g ad a g dabitur; cumq; congeries duorum laterum a b & d g sit nota per hypothesim, erit & latus a g cognitum, hinc & a b latus non latebit. ex hypothesi autem duo anguli a b g & a g b noti, latere non sinunt angulum b a g, sic demum ex duobus angulis b a g & a g b cognitis cum latere a b, tertium quoq; latus b g notum concludemus. Potest autem aliter, quanq; prolixius, idem absolui, si prius ex puncto a ad basim b g perpendicularem a d demiserimus; habebit enim triangulus partialis a b d rectangulus, angulũ a b d acutũ cognitũ, quare ꝑ 31 primi huius proportio a b ad a d nota prodibit; ex eisdem quoq; medijs proportio a g ad a d non latebit, utrũq; ergo duarum linearum a b & a g ad perpendicularem a d proportio nota conclamabitur; hinc per 28 primi huius earum inter se proportio scita ueniet, & ideo coniunctim aggregati ex eis ad utranq; earum proportio notificabitur quãobrem utraq; earum nota prosiliet. hinc tandem linea b g, quemadmodũ in primo præcepimus, cognoscetur.

III.

In triangulo æquicruri, si unus angulus datus fuerit cum uno latere quocunq;, reliqua cognitum iri.



Quanq; in primo sufficienter hanc rem explicasse uidear, libet tamen paulisper circa triangulos æquicrures, & deinde circa triangulos uarios immorari; q̃ ea quæ superius quærebantur breuiori tramite consequamur. Sit talis triangulus a b g, duo latera a b & a g habens æqualia, cuius unus angulus quicunq; sit datus cũ linea terali eius. Dico, ꝙ reliquæ lineæ eius notæ uenient. Erũt enim ꝑ 38 primi huius duo reliqui anguli cogniti. unde & per ante præmissam reliquæ lineæ faciliter notificabuntur. Sic absq; perpendiculari undecunq; ducta, propositum attingere didicimus. Quòd si unus angulus eius trianguli duntaxat fuerit datus, proportionem laterum non ignorabimus, erunt enim per 35 primi huius & reliqui anguli dati; hinc & per ante præmissam uerum esse, quod asserebam confiteberis.

Si quis

IIII.

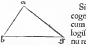
Si quis trianguli uarij duos angulos seorsum dederit cũ uno latere eius quolibet, reliqua latera faciliter metiemur.



Det mihi quispiã duos angulos trianguli a b g tria latera inæqualia habentis, cum uno ipsorũ laterũ, uerbi gratia a b. Dico, quod reliqua duo latera accipiet cognita. Nam 32. primi elementorũ intercedẽte tertius quoque angulus innotescet: cumque per antepræmissam proportio sinus anguli a g b noti ad sinum anguli a b g noti sit uelut lateris a b ad latus a g. tresque harum quantitatum notæ sint, cui nisi prorsus ignaro quarta quantitas, uidelicet latus a g non manifestabitur? Idem eodemque modo lateris b g cognoscendi præceptum habebitur. Hoc pacto perpendicularem undecunque etiam duxisse superuacaneum censebitur.

V.

Ex duobus lateribus trianguli datis cum angulo alteri eorũ opposito, reliquos angulos ac tertium latus notificate.



Sit talis triangulus a b g, duo latera a b & a g habẽs cognita cum angulo a b g. Dico quod reliqui duo anguli cum tertio latere suo innotescẽt. Superiori enim freti syllogismo ex duobus lateribus a g & a b cognitis cum sinu recto anguli a b g noti per hypothesim, angulus a g b notus emerget. Hinc quoque 32. primi ratiocinante tertius angulus b a g haud ignorabitur. Proportio autẽ sinus anguli a b g noti per hypothesim ad sinũ anguli b a g noti per argumentationẽ est ut lateris a g ad latus g b. quare & latus g b non erit ignotum. Quãuis autem ex duobus lateribus a b & b g cognitis cũ angulo b a g ab eis comprehenso aliter quam in primo reliquos angulos cum tertio latere dimetiendi sit potestas, quemadmodũ nunc recitabitur. Non tamẽ per hãc uiam operandum suadeo. erit enim propter angulum b a g notum congeries duorũ angulorũ a b g & a g b cognita. cumque proportio sinus unius eorũ ad sinũ alterius sit cognita: est enim sicut duorũ laterum a b & a g proportio data, fieret per tertij utereque angulorũ a b g & a g b notus. Sed hæc uia nihil facilitatis addit, quare in tali proposito à primi recedere non licebit.

VI.

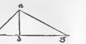
Triangulus trium notorum angulorũ lateribus suis proportiones uendicabit cognitas.

Nihil habet difficultatis hæc propositio, nisi 1. huius negligenter prætereris: nam quorumlibet duorum laterum ea erit proportio, quam habent sinus angulorum eis oppositorum ordine uidelicet præpostero, ut superius traditum est.

VII.

Data perimetro trianguli cũ duobus angulis eius, unumquodque latus seorsum cognoscere.

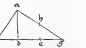
Congeries trium laterũ trianguli a b g sit data cũ duobus angulis eius a b g & a g b. Dico quod omnia latera eius seorsum innotescent. Erũt enim tres anguli eius noti,



noti, quare per argumentionem sæpe adductam proportio a b ad a g nota erit, & ideo coniunctim aggregatũ ex b a & a g ad lineã a g ꝓportionẽ habebit notã. Itẽ ꝓportio a g ad g b nota erit, unde & ꝓportio b a, a g ad g b cognita ꝓueniet, & ideo cõiunctim tota ꝑimeter triãguli a b g ad lineã b g notã habebit ꝓportionẽ, cũq; ꝑimetrũ ipsam dederit hypothesis, erit & linea b g cognita. hinc q̃q; reliqua duo latera nota declarabunt. Poteris præterea idẽ cõcludere ducta ꝑpendiculari a d: nam per 30 primi huius utriusq; linearum a b & a g ad perpendicularem a d proportio nota erit, quare earum inter se proportio manifestabitur. item a b ad b d nota elicietur proportio, item ꝓportio a g ad g d similiter nota erit, unde & utriusq; duarum linearum a b & a g ad lineam b g proportio data proclamabitur: hinc ut prius congeries trium laterum ad ipsam b g lineam, proportionem habebit datam, cætera ut ante.

VIII.

Datis proportionibus trium laterum, perpendiculariq; nota, cuncta latera dimetiri.



Trianguli a b g bina latera proportiones habeant cognitas, sitq; perpẽdicularis a d data. Dico, φ tria eius latera innotescent. Nam si duo latera a b & a g fuerint æqualia, erit b d æqualis ipsi d g, unde proportio a b ad b d cognoscetur: & ideo quadrati a b ad quadratum b d proportio scita ueniet: quare etiam euersim argumentãdo quadrati a b ad quadratum a d nota dabitur proportio: cumq; quadratum a d sit notum, propter costam suã ex hypothesi datam, erit quadratum a b notum, & inde ipsa linea a b non ignorabitur, ex qua demum & proportionibus laterum ꝑ hypothesim datis, reliqua latera innotescent. Quòd si alterum duorum laterum a b & a g altero maius extiterit, sit a b breuius: eritq; ob hoc casus b d breuior casu d g, abscindatur d e æqualis ipsi b d. ex processu igitur primi huius, quod fit ex e g in g b est æquale excessui quadrati a g supra quadratum a b, quorũ quidẽ quadratoꝝ ꝓportio nota erit, unde & diuisim eius, q̃d fit ex e g in g b ad quadratũ a b ꝓportio nota declarabit̃. Hæc aũt ꝓportio per 6. elementoꝝ cõponit̃ ex ꝓportiõe nota lineæ g b ad lineã a b. & ex ꝓportione e g ad a b, cũq; tã ꝓportio composita q̃ ipsa componens prima sint notæ, erit & reliqua componens nota: unde & proportio b e, & ideo medietatis eius b d ad lineam a b scita consurget quadratiq; a d ad quadratum b d innotescet, & ideo euersim quadratum a b ad quadratum a d notam feret proportionem: quadrato igitur a d noto redundabit quadratum lineæ a b cognitum, hinc ipsa a b lineæ cum reliquis trianguli lateribus innotescent.

IX.

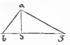
Ex proportionibus trium laterum trianguli, tres angulos eius inuestigare.

Resumpta priori figuratione concludemus propter hypothesim, ut in præmissa, proportionem a b ad b d notam, & ideo per primi angulus b a d, & inde angulus a b d cognoscetur, deinde propter angulum a b g iam notum cum proportione duorum laterum a b & a g data angulus a g b huius arguente innotescet.

tescet. hinc & tertius angulus non poterit ignorari. Habes tamen in primo alium modum, qui si planior uidetur, repetendus est. Si libeat aliter hanc absoluere ex ponatur linea quantalibet notæ quantitatis respectu perpendicularis a d, ad quã inueniantur duæ aliæ secundũ proportiones laterũ trianguli a b g datas: ex his tribus intelligatur constitutus triangulus, & per primi huius inue[illegible]tur perpẽdicularis sua, procedens à termino cõi duorum laterum proportionalĩu duobus lateribus a b & a g. hæc enĩ perpendicularis secundi trianguli habebit se ad perpendicularẽ a d sicut latus quodlibet secundi trianguli notũ ad latus trianguli a b g sibi correlatiuum: cũq; tres huiusmodi quantitatum sint notæ, quartam cognitũ iri necesse est. Hæc trahuntur ex similitudine duorum triangulorum totalium atq; partialium, quam ex sexti elementorum facile est colligere.

X.

Data area trianguli cum proportionibus laterum, unumquodq; eorũ notificari. Vnde & angulos suos metiri licebit.



Repeto triangulum a b g cũ perpendiculari sua a d, quẽadmodũ apud huius figurauimus, ubi cõcludebatur proportio a b ad perpendicularem a d nota: hinc & propter hypothesim perpendicularis a d ad basim b g & ideo ad eius medietatem habebit notam proportionem: cumq; quod sub ipsa perpendiculari & dimidia basi continetur, sit notũ, uidelicet area ipsa trianguli, erit per primi huius tã perpendicularis a d q̃ basis b g nota. quamobrem & propter datas laterum proportiones reliqua latera & tandẽ anguli ipsi non latebunt. Quòd si modus ille uel prolixius nimium uel difficilis uideatur, alium aggrediaris: non dico tamen faciliorem, sed fortasse tibi magis placiturum. Ex tribus lineis quantiscunq;, notis per mensurã, ex qua area trianguli data surrexit, habentibus tamen proportiones ueluti tria latera trianguli propositi intellige constitutum triangulũ, cuius perpendicularem quamcunq; uoles per primi huius metiaris: quæ ducta in dimidiã basim sibi substratẽ suscitabit aream huiusmodi trianguli secundi cognitã: cumq; duo huiusmodi triangulos constet esse æquiangulos, erit area trianguli secundi ad aream trianguli primi, quæ iam notæ sunt, sicut quadratum lateris cuiuslibet secundi trianguli ad quadratum lateris sibi relatiui primi trianguli, unde quadratum illius lateris de primo triangulo, & ideo latus ipsum notificabitur, hinc quoq; reliqua non latebunt.

XI.

Data perpendiculari quacunq; cum duobus angulis trianguli quibuslibet omnia latera mensurare.

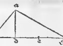


In triangulo a b g sit perpendicularis a d cognita cũ duobus angulis. Dico, q̃ omnia latera innotescent. Habebit enim triangulus a b d partialis rectangulus latus a d cognitum cum uno angulo acuto, nam duobus angulis triãguli a b g cognitis, tertius latere nõ potuerit. quare per primi huius utraq; linearum a b & b d mensurata ueniet. per eadẽ rursus media utranq; linearũ a g & g d metiemur; hinc tota b g, & ideo omnia latera trianguli propositi cognoscentur, quod erat explanandum.

Data per

XII.

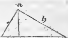
Data perpendiculari atq; basi, & proportione laterum cognitis, utrunq; latus cognoscere.



Hoc problema geometrico more absoluere nõ licuit hactenus, sed per artẽ rei & census id efficere conabimur. Habeat itaq; triangulus a b g perpendicularem a d, & basim b g cognitas, proportionemq; laterum a b & a g datam, quærimus utrunq; eorum. Sit uerbi gratia ꝓportio a b ad a g tanq; 3 ad 5. ita, ut latus a b sit breuius latere a g, quo demum euenit ut casum b d breuiorẽ casu d g nemo inficiari possit, sit ergo d e æqualis ipsi b d, deturq; perpendicularis a d 5, & basis b g 20 pedes. pono lineam e g 2 res, ita, unde linea b e erit 20. demptis duabus rebus, & eius medietas b d 10 minus 1 re, reliqua uero d g, erit 10 & una res. duco b d in se, producitur 1 census & 100, demptis 20 rebus, quibus addo quadratũ perpendicularis scilicet 25. colliguntur 1 census & 125. demptis 20 rebus. item b g in se, fiunt 1 census, 20 res & 100. quibus adijcio quadratum perpendicularis 25. colliguntur 1 census 20 res & 125. sic habebo duo quadrata linearum a b & a g, quorum proportio est ut 9 ad 25. duplicata scilicet proportio 3 ad 5, quæ erat ꝓportio laterum. cum itaq; proportio quadrati primi ad quadratum secundum sit tanq; 9 ad 25. si duxero 25 in quadratum primum, itemq; 9 in quadratum secundum, quæ producentur erunt æqualia, restauransq; ut assolet defectibus, & ablatis æqualibus, utrobiq; perducemur ad 16 census & 2000 æquales 680 rebus: quamobrem quod restat, præcepta artis edocebũt. Linea ergo g e quam posui 2 res nota redundabit, hinc residua ex basi b e & eius medietas b d, quæ cum perpendiculari a d, latus a b notum suscitabũt, unde tandẽ & latus a g notum pronunciabitur, quæ libuit efficere.

XIII.

Cognito utroq; casuum, & proportione laterum data, quantitates laterum emoliri.

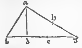


In triangulo a b g ducta perpendiculari a d, sit uterq; casuum b d & d g datus cum proportione laterum. Dico, q utrunq; latus cum perpendiculari ipsa innotescent. Sit casus b d breuior, nam si essent æquales duo casus, latera quoq; haberentur æqualia, eorum tamen cognitio non consequitur casus datos & ꝓportionem laterum, quæ est, æqualitatis. secetur ergo ex longiori casu linea d e æqualis casui breuiori: differentia quoq; duorum laterum sit h g. cum igitur ꝓportio a g lateris ad a b sit data, erit diuisim ꝓportio h g ad a h data, & ideo h g ad duplam ipsius a h scilicet congeriem duarum linearum a b & a h data erit: quare etiam coniunctim ꝓportio h g ad summam duorum laterum a b & a g non erit ignota. quod autem sub h g & duobus lateribus a b & a g cõiunctis continetur, æquum est ei, quod sub e g & g b. illud autem notum est ꝓpter duos casus ex hypothesi notos, unde & per processum primi huius, quod sub h g & g a a b continetur, notum erit: cumq; proportio linearum hoc continentium sit nota, erit per primi huius tam linea h g q̃ congeries duorum laterum nota: hinc tandem dempta h g nota ex aggregato laterũ noto residui medietas pro latere breuiori reputabitur, unde & longius innotescet la-

tus, quæ fuere demonstranda.

XIIII.

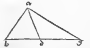
Si uterque duorum casuum inæqualium datus fuerit, aggregatumque ex lateribus datum, utrunque latus secernere.



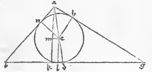
Resumo triangulum præcedentis, in quo datus sit uterque casuum b d & d g, summaque duorum laterum a b & a g sit nota. Dico, quod utrunque latus agnoscetur. Erit enim quod fit ex e g in g b cognitum, & ideo quod fit ex h g in g a, a b coniunctim notum erit. cumque congeries ipsorum laterum sit data, erit per primi huius h g nota differentia scilicet laterum, quã si ex summa duorum laterum dempseris reliqui medietas quantitatem lateris minoris proclamabit. hinc quoque reliquum latus non ignorabitur, quod erat absoluendum.

XV.

Basis trianguli data notum subtendens angulum cum aggregato laterum cognito, utriusque laterum & utriusque angulorum sibi oppositorũ uiam mensurationis aperient.



Triangulus a b g basim b g notam habeat cũ angulo b a g dato, sitque congeries laterum a b & a g cognita. Dico, quod utrunque latus eius cũ utroque angulorum eis oppositorum innotescent. Diuidatur enim angulus b a g per mediũ demissa linea a d ad basim contingente in puncto d, erit igitur per tertiam sexti elementorum proportio b d ad d g sicut a b ad a g, & permutatim proportio a b ad b d sicut a g ad g d; quare per quinti elementorũ proportio aggregati ex lateribus a b & a g ad basim b g, sicut lateris a b ad lineam b d; cumque hæc proportio sit data est enim uterque terminus eius datus, erit proportio a b ad b d data, sed & angulus b a d notus accipietur; cum sit medietas anguli b a g per hypothesim noti: quare per primi huius angulus a b d mensuratus habebitur; hinc quoque reliquus de duobus rectis angulus a d b latere non poterit, qui cum sit æqualis duobus angulis a g d & d a g, & angulus d a g sit notus, erit residuus angulus d a g mensuratus. sic duo anguli a b g & a g b noti erunt. congeriem autem duorum laterum a b & a g datam subiecit hypothesis; quare per huius quarti utrunque laterum a b & a g notum pronunciabitur, quæ fuere declaranda. Illud autem aliter attingere poterimus hoc pacto. Inscribatur triangulo a b g circulus h n l, cuius centrum necessario erit in linea a d, quẽadmodũ ex quarti elementorum trahitur, quod sit e, à quo ad tria puncta cõtactuum h n & l, educantur tres semidiametri e h, e n & e l, deinde ex puncto a descendat perpendicularis a k occurrens basi in puncto l; oportet autem punctum k reperiri



petiri in parte lateris a b, à linea diuidēte angulū per æqualia puncta b & d, si latus ipsum breuius fuerit latere a g: erit enim angulus a b g maior angulo a g b, & ideo duo anguli a b g & b a d, qbus æquipollet angulus a d g, maiores erūt duobus angulis d a g & a g d, scilicet angulo a d b, adiectis utrobiq; æqualibus angulis b a d & d a g: angulus ergo a d g maior, & angulus a d b minor recto conuincetur. hinc etiam costat semidiametrū e l secuisse lineam b d, ducatur insuper linea e m æquedistans basis, & ideo perpendicularis ad lineam a d, præterea basim b g æqualem esse duabus lineis b n & g h, nō negabis, si tertij elementorum satis didicisti, sublata ergo basi b g data ex congerie laterum data, relinquetur congeries duarum linearum a n & a h cognita, & ideo medietas eius scilicet linea a h mensurata: oportet enim duas lineas a n & a h circulū contingētes esse æquales. triangulus ergo a e h rectangulus ex latere suo a h cognito cum angulo acuto e a h noto propter duplum eius notum, duo latera sua a e & e d cognita depromet. sic circuli triangulo proposito inscripti semidiameter nota colligetur, ex qua in medietatem perimetri trianguli notam resultat area trianguli nota: ex area autē nota & medietate basis, ppter hypothesim cognita per primi huius perpendicularis a k mēsurata declarabitur, cui si lineā k m æqualē ipsi e l semidiametro circuli dempseris, relinquetur linea a m cognita, ex qua demum & linea a e superius nota, angulum e a m metieris, quo tandem sublato ex medietate anguli b a g dati scilicet ex angulo b a d, relinquetur angulus b a k notus, qui deinde angulum a b g latere non sinet: sed & duo anguli b a g & a b g tertium socium suū angulum a g b notum suscitabunt, postremo igitur p̄, huius latera trianguli nota prosilient.

XVI.

Data basi alicuius trianguli cum perpendiculari cui subsistit, & aggregato laterum cognito, utrunq; eorum secernere.

Hæc partim conuertit præcedentem, & ideo figuram suā resumet, ubi ex perpendiculari nota cum medietate basis aream trianguli metiemur, cumq; perimeter trianguli sit nota, erit semidiameter e n circuli sibi inscripti nota: linea quoq; a n nota proclamabit, ut in præcedenti: quare & linea a e & angulus e a n notificabuntur, unde & duplus angulus n a h siue b a g non latebit, k m autem æqualis semidiametro e l siue e n cognitæ cum perpendiculari a k per hypothesim nota, differentiam suam scilicet a m lineam notificabunt: quæ rursus cum a e pridem cognita, angulum a e m notum reddent, æqualem uidelicet angulo a d b: ex duobus autem angulis n a e siue b a d & a d b cognitus, angulus quoq; a b d siue a b g notus declarabitur: erat autem b a g cognitus. quare residuus a g b non ignorabitur, & ideo per huius utrunq; latus notum enunciabitur, quod placuit determinare. Non autem necesse est perpendicularem a k intra triangulum cadere, sed contingit eam cadere extra triangulum, nonnunq; etiam coincidere lateri minori, si fuerint inæqualia latera, maiori enim coincidere non potest: huius rei indicia erunt talia. Si acciderit lineam a n suo modo repertam cum semidiametro circuli inscripti triangulo coniunctim æquales esse perpendiculari a k datæ, necessario perpendicularis dicta coincidet lateri a b, id est, oportuit angulum a b g trianguli propositi esse rectum: si uero tale aggregatum minus fuerit, ipsa perpendiculari datæ signum est eam intra triangulum cecidisse, & si maius extra, super hoc autem demonstrationem conscribere non est consilium, cum faci

le quidem sit, parum autem utilitatis adducat: tuo igitur quod reliquum est seruatur ingenio, figuræ præterea aliter cadenti demonstrationẽ suam, nisi rudissimus fueris, accomodare poteris.

XVII.

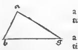
Datis duobus angulis & uno casu quocunq;, omnia latera cum perpendiculari manifestare.



Sit triangulus a b g qualis proponitur, in quo ꝑpendicularis a d duos casus ex basi distinguat b d & d g: quorum alter uerbi gratia b d sit cognitus cũ duobus angulis trianguli a b g. Dico, ꝙ omnia latera sua noticiã non fugient. Erunt enim per hypothesim 32. primi elementorum suffragante tres anguli trianguli a b g cogniti, quare triangulus partialis a b d rectangulus angulum a b d acutum habens notum cum latere b d, reliqua duo latera sua a b & a d per primi huius notificabit: hinc in triangulo a g d partiali angulum a g b acutum habente notum cum latere a d, utraq; linearum a g & g d innotescet per eandem primi huius: collectis ergo duabus a d & d g, resultabit tota basis cognita, & problematis integra consummabitur intentio.

XVIII.

Data proportione duorum laterũ trianguli cum angulo alteri eorum opposito, reliquos duos angulos mensurare.



Talis esto triangulus a b g, cuius duo latera a b & a g ꝓportionem habeant notã, sitq; angulus a b g datus. Dico, ꝙ reliqui anguli non latebunt. Erit enim per huius ꝓportio a g lateris ad a b tanq; sinus anguli a b g ad sinum anguli a g b, tribus autem harum notis existentibus quarta quãtitas nota ueniet. inde ergo angulus a g b notificabitur, & tandem tertius b a g angulus latere nõ poterit. Constat deniq; utrunq; laterum a b & a g ad ipsam basim b g notam habiturum proportionem, si supra memorata repetieris, quod quidem corollarij uice libuit annectere.

XIX.

Datis duobus casibus cũ differentia laterũ utrũq; eorũ percontari.

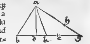
Est enim quod sub differentia casuum & ipsa basi continetur æquale ei, quod sub differentia laterum atq; ipsorum congerie continetur; eo igitur cognito & differentia laterum data per primi huius congeries laterum mensurabitur; unde etiam utrunq; eorum noticiæ subijcietur.

XX.

Si quis differentiam laterum dederit, differentiamq; casuum cũ angulo quẽ basis subtendit, omnia latera cognita recipiet.

Esto triangulus a b g, in quo perpendicularis a d duos casus b d & d g secernat, quorum differentia e g sit data; differentia etiam laterũ quæ sit h g nota suppona

ponatur cum angulo b a g. Dico, quod omnia latera & omnes anguli cognoscendi uenient. Descendat namque ex uertice trianguli a linea a k, diuidens angulum b a d per æqualia: erit itaque proportio a g ad g k, sicut duarum b a, a g coniunctorum ad basim b g, quemadmodum superius in huius ratiocinati sumus: proportio autẽ b a, a g ad basim b g est, ut e g ad h g per

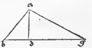


primi huius, & secundã partem sexti elementorum, quæ cum sit nota propter terminos suos ex hypothesi datos, erit & proportio a g ad g k cognita: cumque angulum b a g dederit hypothesis, erit eius medietas g a k cognita, quare per corollarium huius angulum a g k siue a g b notum comparabimus, & ideo tertius angulus b a g trianguli propositi non latebit. inde quoque per huius proportio a g lateris ad latus a b scietur, & diuisim proportio hæ differentiæ laterum notæ ad latus breuius a b nota erit, unde & latus a b & tandem reliqua omnia ex supra dictis cognoscemus.

XXI.

Datis duobus lateribus trianguli cuiuslibet cum proportione casuum, quantitatem basis agnoscere.

Sint duo latera a b & a g trianguli a b g cognita, proportioque casuum b d & d g sit data. Dico, quod basis ipsa nora proueniet. Est enim differentia quadratorum a b & a g nota propter hypothesim, æqualis differentiæ quadratorum b d & d g, quemadmodũ in huius ostẽdimus, cumque proportio casuum sit data, erit & proportio quadratorum suorum data: & diuisim differentia huiusmodi quadratorum ad quadratum casus minoris b d notam habebit proportionem, cũque differẽtia ipsa sit nota, erit & quadratum casus minoris cognitum, unde & casus ipse minor & deinceps reliquus innotescent, tota igitur basis nota elicietur. Non mireris autem, quod hactenus ut plurimũ perpendicularem intra triangulũ cadere supposuerim, quãuis nonnunquam extra triangulum cadere cogatur, habet enim hoc omnis triangulus infallibiliter propriũ, quod ab aliquo punctorum eius angularium ad latus sibi oppositũ ducibilis est perpendicularis una intra angulum ipsum casura. Quod si extra triangulum perpendicularis ceciderit, paucis rebus mutatis & cognitu facilibus, quicquid facto opus est, cõsequeris: nollem equidem ingenium tuum pauculis quibusdam inueniendis non fatigari.



XXII.

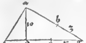
Datis duobus casibus cum proportione laterum, utrunque eorum dimetiri.

Hæc uidetur conuertere præcedentem, deductionem autem eam prorsus habet quã præcedens, quãobrem tanque satis lucubratã tibi relinquo.

XXIII.

Data differentia duorum laterum, differentiaque duorum casuũ cũ ipsa perpendiculari cognita omnia latera propalare.

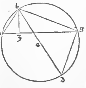
Sit talis triangulus a b g, cuius duo latera a b & a g differentiã habeant notã h g, ductaque perpendiculari a d duorum casuum b d & d g, differentia sit e g: hæ duæ diffe-



duæ differentiæ sint datæ, & ipsa perpendicularis a d data. Dico, quod omnia latera trianguli nota concludentur. Per artem rei & census hoc problema absoluemus. Detur ergo differentia laterum ut 3, differentia casuum 12. & perpendicularis 10. pono pro basi unã rem, & pro aggregato laterum 4 res, nã proportio basis ad congeriem laterũ est ut h g ad g e, scilicet unius ad 4. erit ergo b d $\frac{1}{2}$ rei, minus 6, sed a b erit 2 res demptis $\frac{1}{2}$. duco a b in se, producuntur 4 census & 2 $\frac{1}{4}$. demptis 6 rebus. itẽ b d in se facit $\frac{1}{4}$ census, & 36 minus 6 rebus; huic addo quadratum de 10 qui est 100. colliguntur $\frac{1}{4}$ census & 136 minus 6 rebus, æquales uidelicet 4 censibus & 2 $\frac{1}{4}$ demptis 6 rebus. Restaurando itaque defectus, & auferendo utrobique æqualia, quemadmodum ars ipsa præcipit, habebimus census aliquot æquales numero, unde cognitio rei patebit, & inde tria latera trianguli more suo innotescẽt.

XXIIII.

Datis tribus lateribus trianguli rectilinei, diametrum circuli eum circumscribentis inuenire.

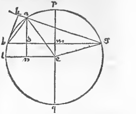


Hæc tametsi de angulis trianguli inueniendis nihil proponat, utilis tamen sequentibus uidebitur. Sint tria latera a b, b g & g a, trianguli a b g nota, quærimus diametrum circuli eum circũscribentis. Esto circulus huiusmodi a b g d, oportet autem duos angulos quicunque fuerint trianguli a b g esse acutos, qui sint, uerbi gratia, a & g, quos facile cognosces, si primo triangulorum libello satis incubuisti: demittaturque à puncto b perpendicularis b 3, & diameter circuli prædicti b e d, cuius terminus d copuletur puncto g per lineã d g. habes itaque duos triangulos a b 3 & b d g æquiangulos, uterque enim angulorum b a g & b d g in circumferentia consistens suscipit arcum b g, sed uterque angulorum a 3 b & b g d rectus est: a 3 b quidem ex dispositione figuræ, b g d autem ex dispositione & 30. tertij elementorum, quare & tertius tertio æqualis cõuincetur: unde & per quartã sexti proportio 3 b ad b g est ut a b ad b d. tres autem harum notæ sunt; duæ scilicet a b ad b g per hypothesim: perpendicularis uero b 3 ex primi huius inuenitur, ergo & quarta, quæ est diameter circuli, nota ueniet, quod expectabas ostendendum. Elegimus autem duos angulos acutos, ut perpendicularis intra triangulum coartaretur facilitatis gratia, nam si caderet extra, parumper uariandus esset processus. Quòd si acciderit quadratum alicuius trium laterum quadratis duorum reliquorum laterum simul iunctis æquiualere: uerbi gratia, quadratum a g æquari duobus quadratis linearum a b & b g, erit a g diameter circuli circumscribentis triangulũ, neque ampliori quæsito opus est: fiet enim per ultimã primi elementorum angulus a b g rectus, & ideo per cõuersionem 30. tertij a b g semicirculus habebitur, & a g diameter circuli, quod erat exequendum.

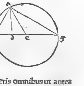
XXV.

Si basim trianguli notam acceperimus cũ perpendiculari siue area trianguli, cum quoque quem basis subtendit angulum datum habuerimus, utri

mus, utriusq; lateris noticiam extemplo reddemus.



Sit triangulus a b g, basim b g notam habens cum perpendiculari a d, siue cum area sua, nã alterum ex altero pendet; sit quoq; angulus b a g datus. Dico ꝙ utrunq; laterum eius noticiã attingemus. Detur enim angulus b a g obtusus, extendaturq; g a donec perpendicularis b k ex puncto descensura residere possit in eadem, erit itaq; propter angulum b a k notum proportio a b ad b k nota per huius; proportio autẽ a b ad b k est tanq; eius quod a b & a g ad id, quod sub b k & a g continetur, quare & illa proportio nota erit; quod autem fit ex b k in a g notum est, quia duplũ areæ trianguli, igitur & quod sub a b & a g continetur, rectangulum erit notũ: exarata demum circulo triangulũ a b g circumscribente, diameter eius notificabitur ex præcedenti propter perpendicularem a d notã cum eo, quod sub a b & a g continetur noto; huiusmodi diametet sit p q, secans cordã b g per medium, & ideo orthogonaliter in puncto m, eductisq; ex centro e tribus semidiametris e g, e a & e l, quæ æquedistet cordæ b g, cui incidat perpendicularis a d satis prolongata in puncto n. propter semidiametrum igitur e g & dimidiã basi m g notas cum angulo e m g recto, notificabitur linea e m, cui æqualis est ipsa d n: hinc tota a n cognita resultabit, quæ deinceps auxilio semidiametri e a notæ, angulo apud n recto existente, suscitabit lineã n e cognitã, cui æqualis habetur linea d m, qua dempta ex dimidia basi b m, relinquetur casus minor: ea uero adiecta, resultabit casus maior cognitus: hinc ex casibus notis & perpendiculari a d latera duo cognita fient. Hæc autem tenent, quando duorum laterũ a b & a g alterum altero maius extiterit, cuius rei indicium erit, si linea d n ex perpẽdiculari uidelicet a d & linea m e resultãs, minor fuerit semidiametro: si enim esset æqualis semidiametro, duo latera a b & a g necessario fuissent æqualia, unde etiã perpendicularis a d diuisisset basim per æqualia; sic ex perpendiculari nota cum dimidia basi resultaret utrunq; latus cognitum. In his rebus demonstrandis non sisto gradum, cum facilia admodum ostensu reputentur. Si autem angulus b a g fuerit rectus, erit b g necessario diametet circulo triangulum b a g circumscribentis, cuius medietati æqualis si fuerit perpendicularis a d data, erunt duo latera trianguli æqualia, utrunq; uidelicet corda quadrantis, unde facillime cognoscetur. Si uero perpẽdicularis fuerit minor dimidiæ basi, erũt duo latera inæqualia, educta igitur semidiametro e a, quæ est æqualis dimidiæ basi, nota erit d e, hinc ut prius uterq; casuum cum utroq; laterũ innotescent. Quòd si angulus b a g acutus offeratur, erit portio b a g maior semicirculo, &



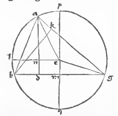
ideo semidiameter e l secabit perpendicularem: quare cæteris omnibus ut antea procedentibus, nisi ꝙ perpendicularis b k intra triangulũ cadit, lineã d n æqualem ipsi e n ex perpendiculari a d nota minuemus, inueniemq; tandem lineam

H d m ex

d m, ex dimidia basi dememus, ut relinquatur casus minor, perpendiculari saltem a d intra angulum cadente, quod accidit, dum linea d m minor dimidia basi resultabit; aut econtra dimidiā basim ex linea d m minuemus, si perpendicularis extra triangulum ceciderit, id est, si d m dimidiā basim superauerit, quae duae si fuerint aequales, constabit perpendicularem a d coincidisse lateri [illegible], quod autem in hac demonstratione restat, si pauculum habes ingenium, eniti poteris.

XXVI.

Data area trianguli cum eo, quod sub duobus lateribus continetur rectangulo, angulus quem basis respicit, aut cognitus emerget, aut cū angulo cognito duobus rectis aequipollebit.



Resumptis figurationibus praecedētis, si perpendicularis b k uersus lineā a g procedens, extra triangulum ceciderit, erit per ea, quae in praecedenti commemorauimus, proportio b k ad b a nota, & ideo per primi huius angulum b a k notum accipiemus, sic angulus b a g cum angulo b a k noto duobus rectis aequiualebit. Si uero perpendicularis b k intra triangulum ceciderit, quemadmodū in tertia figuratione praecedentis cernitur, erit ut prius a b ad b k notā habens proportionē, & ideo angulus b a k siue b a g notus concludetur. At si perpendicularis b k coinciderit lateri a b, necesse est angulum b a g fuisse rectum, & ideo cognitum, quod quidem accidit, quando area trianguli propositi aequatur ei, quod sub duobus lateribus eius continetur rectangulo.

XXVII.

Data differentia duarum linearum, quae rectangulum spaciū continent notum, utranque earum dimetiri.



Sint duae lineae a b & b c inaequales, rectangulum spacium a c continentes notum, sitque differentia earum d c cognita. Dico, quod utraque earum nota reddet. Erit enim quod fit ex d b in b c parallelogramū rectangulū notum, quod b d sit aequalis ipsi a d; diuisaque d c differentia per medium in h, erit quadratum lineae d h cognitum, quod quidem adiectum rectangulo a c noto, per sextā secundi conficiet quadratum b h cognitum: hinc ergo costa sua scilicet linea b h notificabitur, ex qua si reiecerimus lineā d h notā, manebit b d, & ideo ipsa a b nota: sed & eidē b h nota addemus medietatem differentiae, scilicet lineam h c notam, ut resultet tota b c cognita, quod erat absoluendum.

XXVIII.

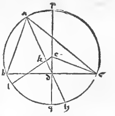
Data area trianguli, & angulo quem basis respicit cognito cum differentia laterum, utrunque eorum innotescet.

Per mo-

Per modum enim circa huius explanatum concludemus, quod sub duobus lateribus cõtinetur cognitum: cumq; differentiã eorum notã attulerit hypothesis, erit per præcedentem utrumq; eorum cognitũ, cuius gratia fatigati sumus.

XXIX.

Si a angulo trianguli noto descendat linea quædam cognita, basim datam diuidens per æqualia, utrunq; latus, reliqui etiam anguli non erunt ignoti.



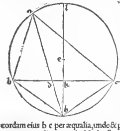
Sit triangulus a b c, angulum b a c notum habens, à cuius uertice a descendat linea a d nota respectu basis b c, quã per medium scindit in puncto d. Dico, q utrunq; laterum a b & a c notum ueniet cum reliquis duobus angulis. Circumscribo enim huic triangulo circulum a b h c super centro e, cuius diameter p q p punctum d transeat, orthogonaliter secans ipsam b c datam lineã: continueturq; linea a d, donec occurret circumferentiæ circuli in h, educantur deniq; duæ semidiametri e c quidem cõterminalis duobus lateribus trianguli propositi; e l autem secans cordã a h si possibile sit per medium & orthogonaliter: erit itaq; angulus c e d æqualis angulo b a c dato, & ideo per primi huius propter angulum apud d rectum, proportio d c notæ ad lineam d e nota erit, quare linea d e nota habebitur. est autem quadratum lineæ b d notæ, pp ter hypothesim æquale ei, quod fit ex a d in d h per tertij elementorũ, cumq; a d sit nota, erit & d h inde quoq; nota a h cum eius medietate a k non ignorabitur; hinc residua k d scita dabitur. ex duabus itaq; lineis d e & d k cũ angulo k recto per primi huius cognoscetur angulus d e k, & ideo arcus l q notus accipietur, propter triangulum autem d e c notorum angulorum linea d c, & ideo etiam dupla eius b c respectu semidiametri circuli e c notam habebit proportionem, unde & corda a h, quæ nota prius erat respectu lineæ b c, iam respectu diametri circuli huius cognita dabitur; unde & per tabulam sinuũ aut cordarum arcus a b h innotescet. oportuit autem arcum b q c esse notum propter angulum b a c datũ, dempto igitur arcu l q prius noto ex arcu b q scilicet medietate arcus b q c, relinquetur arcus b l notus, qui deinde reiectus ex arcu a l scilicet medietate arcus a l h, manebit arcus a b notus, cui si addideris totum arcum b q c notum, resultabit arcus a b c cognitus: horum duorum arcuum cordas ex tabula colligemus, sic duo latera trianguli propositi respectu diametri circuli nota uenient; erat autem & basis b c respectu eiusdem nota, unde & ipsa latera respectu basis mensuratas habebunt longitudines, angulos autem trianguli propositi reliquos laterẽ non sinunt duo arcus a b & a c, in quos ipsi cadunt supra circumferentiam consistentes. Contingit autem lineam a h esse diametrum circuli, quod quando fiet, iam cõmemorata satis edocebunt, conclusimus enim tam ipsam a h, q̃ diametrum circuli respectu basis b c notam habere quantitatem. Poterit etiam quispiam dare angulum b a c rectum, unde basis b c fieret diameter circuli, & a d semidiameter; tunc autem problema erit uarium, nisi alia quædã

 conditio

conditio accesserit. In hac autem figuratione angulum b a c acutum subiecimus qui si obtusus offerretur, quãuis figuratio paulisper uariaretur, processus tamen idem fermè ad intentum nos perducet.

XXX.

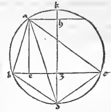
Si quis triangulus duo latera habeat inæqualia, à quorum commu ni termino descendat linea angulum per æqualia diuidens, basim autem per inæqualia, sitq; ipsa linea diuidens nota cum portionibus basis diuisæ utrunq; latus cognitum iri.



Sit talis triangulus a b g, cuius latus a b breuius latere a c: à cuius angulo a descendat linea a d nota, angulum quidẽ b a c diuidens per medium, basim autem in duas partiales a d & d c notas. Dico, q utrunq; laterum a b & a c innotescet. Circumscribatur enim huic triangulo circulus a b h c centrum e habens: protensaq; a h usq; ad occursum circũferentiæ in h, ducant duæ cordæ b h & c h, quas cõstat esse æquales, ꝓpter angulum b a c per æqualia diuisum. ducatur rursus diameter circuli l h, quæ cum diuidat arcum b c per medium, diuidet etiam per tertij cordam eius b c per æqualia, unde & per tertij orthogonaliter eam secabit. cũ autem utraq; linearum b d & d c sit nota, erit per tertij sexti & primi huius linea d h nota: est autem & d k cognita uidelicet differentia dimidiæ basis & minoris sectionis: angulo igitur k recto existente, linea k h per primi huius nota pronunciabitur, ex qua demum & dimidia basi cognita, nisi primi huius mentiatur, utraq; cordarum b h & h c æqualium nota resultabit. quadrangulum itaq; a b h c circulo inscriptum, duas diametros a h & b c notas habebit, quod autem sub eis continetur, æquũ est duobus rectangulis, quorum alterum sub b h & a c, alterum sub h c & a b continetur: hoc enim alibi demonstratum est. Hæc autem duo rectangula parallelograma æquantur ei, quod sub b h & congerie duorũ laterum continetur, ꝓpter æqualitatem linearum b h & h c. quod igitur sub b h & aggregato laterum a b & a c continetur, erit cognitum: unde & propter lineam b h cognitã primi huius ratiocinante, cõgeries duorum laterum nota proueniẽt. est autẽ ꝓportio b d ad d c sicut a b ad a c per tertiã sexti, & cõiunctim b c ad c d sicut congeries duorũ laterũ ad ipsum latus a c: cumq; tres huiusmodi quantitatũ sint notæ, erit & quarta scilicet linea a c inuenta: unde & reliquum latus a b non poterit latere. hæc pro lateribus cognoscendis, ad angulos autem inueniendos, iam paratum habes iter, si huius intento tuo accomodaueris.

Poterimus 30 huius aliter absoluere hoc pacto. Sit triangulus a b c, aream habens notam cum basi b c & angulo b a c. Dico, q utrunq; laterũ a b & a c notum prodibit. Intelligo enim huic triangulo circumscriptũ circulum a b d c, in quo produco cordam a l æquedistantem ipsi b c, & diametrum d k utriq; dictarum cordarum perpendiculariter incidentem: huic quidem in puncto 3, illi autẽ in puncto h: sitq; a e perpendicularis ac b c, si oportuerit prolongatã. quoniã igitur aream trianguli cum basi b c notam subiecimus, erit perpendicularis a e

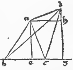
scita,



scita, ipsa enim in basim dimidiam ducta, conficit aream trianguli datã: hinc æqualis 3 h, ob eam rem non erit ignota. propter angulum autem b a c & ideo arcum b c cognitum, erit corda b c cognita per tabulam sinuũ aut cordarum respectu diametri circuli; unde & sagitta 3 d eadem relatione nota fiet: cum autem perpendicularis a e cognita habeatur respectu cordæ b c, erit & ipsa respectu diametri circuli nota, & ei æqualis 3 h: tota igitur sagitta d h respectu diametri circuli nota consurget, & ideo arcus a d cognitus dabitur, à quo si dempsero arcum b d, medietatem scilicet arcus b c pridem noti, relinquetur arcus a b notus: hinc corda a b cognoscetur respectu diametri circuli, & consequenter respectu lineæ b g. arcus denicq; a b iam notus arcui b c adiectus, totum arcum a d c cognitum suscitabit, & ideo corda eius respectu diametri circuli, tandemq; respectu lineæ b c manifestabitur. Angulos autem a b c & a c b propter arcus a b & a c iam notos nemo ignorabit.

XXXI.

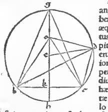
Duobus triangulis supra basim unam notam constitutis, binacq; latera æqualia ac cognita habentibus, quantum uertices eorum distent inquirere.



Supra basim b c notam constituantur duo trianguli a b c & d b c, quorum utriusq; latera sint cognita; ducatur linea a d uertices eorum coniungens, quã præsens quærit problema. Ex uerticibus a & d duæ descendant perpendiculares ad basim, si opus fuerit, satis extensam, quæ sint a e & d g, has perpendiculares quo pacto inuenias, superius cõmemoratum est; si igitur fuerint æquales, distantia duorum uerticũ erit per primi elementorũ æqualis lineæ e g, quæ est aggregata ex duobus casibus e c & c g in hac figuratione, quos superius mensurare docuimus; unde & distantia uerticum nota erit. Si uero perpendiculares nõ fuerint æquales, à summitate minoris earum quæ sit, uerbi gratia, a e, ducatur a h æquedistans basi, & occurrens reliquæ perpendiculari in puncto h, quæ nota erit quoniã æquali lineæ e g aggregato duorum casuũ: lineam quocq; d h non ignorabit Geometra, cum h g sit æqualis a e perpendiculari notæ: hinc & ꝓpter angulum a h d rectum primi huius ratiocinãte, linea a d latere nõ poterit, quæ hactenus quærebatur. Ad lineã autem a h cognoscendã nõ semper oportebit colligere duos casus, quemadmodũ in præsentiarum iussimus: sed nonnunq; alterũ ex altero demi, ut relinquatur linea e g siue a h cognita, & sicut hic cõiunximus casum minorem unius trianguli minori casui alterius, ita interdum casum minorem unius maiori casui alterius coniungere opus erit; quod quando fiet, tuo ingenio relinquitur discernendum.

XXXII.

Si duo trianguli supra basim unam notam constituti fuerint, quorum unus æquicruris, alter autem uarius, & anguli, quos basis subtendit, dati fuerint cum distantia duorum uerticum suorum, bina latera eorum cognitum iri.



Supra basim datam b c constituantur duo trianguli, a b c quidem duo latera a h & a c habens æqualia, d h c autem duo latera habens inæqualia, & sit uterq; angulorũ h a c & b d c datus, ductaq; linea a d distantia scilicet duorũ capitum sit data. Dico, q utriusq; eorum duo latera erunt data. Sit enim pro libito angulus h a c maior angulo h d c, demittaturq; ex puncto a perpendicularis ad basim cõmunem, quæ necessario diuidet basim per æqualia, quod fiat in puncto k; hæc perpendicularis intelligatur utrinq; indefinitæ quantitatis; circuli itaq; circumscripti triangulo d h c circumferentia secet eam superius in g, inferius autem in puncto h; constabit itaq; lineam g h esse diametrum huius circuli per corollarium primæ tertij, in qua sit centrum circuli e; ductaq; semidiametro e d & duabus cordis g b & g c, erit angulus h g c æqualis angulo b d c; cũ igitur uterq; triangulorum a h c & g h c æquicrurium habeat angulum notum cum basi data, erunt per primi huius bina latera eorum nota cum perpendicularibus suis; unde etiam tota diameter g h nota fiet, quadratum enim dimidiæ basis k c notæ æquatur ei, quod fit ex g k iam nota in k h, hinc k h & consequenter tota g h diameter nota ueniet; dempta autem differentia perpendicularĩũ g a propter ipsas perpendiculares cognita ex semidiametro g e nota residuabitur linea a e scita; sic triangulus a e d tria latera nota habens, angulum suum e a d cognitum efficiet, ex quo demptus angulus e a c notus, quoniã medietas h a c dati, relinquet angulum c a d mensuratum; is demum cum duabus lineis c a & a d notis, tertiam quoq; c d manifestabit. Item dimidius angulus h a c, qui est b a k adiectus angulo e a d prius cognito, conflabit totum angulum h a d notum, qui cum duobus lateribus a h & a d iamdudum cognitus, lineam h d suscitabit notam; sic ergo duo latera trianguli d a c dimensi sumus, quod libuit attingere. Paulo aliter ratiocinabimur circumferentia circuli h c d g secante perpendicularem infra punctum a, quod reuera contingit, dum angulus b d c maior angulo h a c oblatus fuerit. Quòd si duo dicti anguli æquales subijciãtur, circumferentia circuli b c d g per punctum a transeat necesse est; cognita igit̃ diametro circuli ut antea, itemq; duabus lineis a h & a d, quæ erũt cordæ dicto circulo inscriptæ, non erit difficile mensurare utranq; cordarũ b d & c d, si circa cordas circuli inueniendas parumper exercearis. quod igitur in hac re superest, tuæ relinquimus industriæ.

XXXIII.

Si cuiuslibet trianguli angulum per æqualia diuidat linea ad basim notã descendens, fuerintq; sectiones basis inæquales notæ: itemq; angulus acutus, quẽ linea diuidens, cum ipsa basi continet notus datus, utrunq; latus trianguli cognitum reddetur.

In trian-

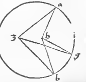
In triangulo a b g ducatur linea a d, diuidens angulum quidem b a c per æqualia, basim autem b c notam per inæqualia in puncto d; sitq; utraq; sectionum b d minor & d c maior data cum angulo a d b acuto. Dico, q utrunq; latus cognoscetur. Oportet autem angulum a d b, quemadmodum cōmemorauimus, esse acutum propter b d minorem sectionē cui insidet, erit enim tertia sexti ratiocinante a b minor a c, & ideo angulus a b c maior angulo a c b conuincetur, angulus a d c ualet duos b a d & a b d. item angulus a d b æquiualet duobus a c d & d a c; cumq; angulus b a d sit æqualis angulo c a d, resultabit angulus a d c maior angulo a d b, & ideo hic quidem obtusus, ille uero acutus enunciabitur. Circumscribatur ergo triangulo a b c circulus a b h c, reliquaq; disponantur quemadmodū in huius; ex angulo itaq; a d b siue h d k noto cū angulo k recto, & linea d k differentia dimidiæ basis datæ & minoris sectionis, utraq; linearum d h & h k nota proueniet cum angulo d h k; deinceps utraq; linearum b h & h c propter dimidiam basim notam cum linea h k cognita dabitur; cumq; quod sub duabus b d & d c continetur sit æquale ei, quod sub a d & d h continetur; tres autem harum sunt notæ, erit per & primi huius linea a d nota, sic duas diametros a h & b c quadrangulo a b h c circulo inscripti notas habemus; unde & reliqua sicuti in huius absoluere licebit.

F I N I S.

LIBER TERTIVS TRIANGVLORVM.

I.

Si sphæra plano secetur, communis sectio superficiei sphæricæ & plani secantis erit circumferentia circuli. Vnde constabit pedem perpendicularis à centro sphæræ ad superficiem secantem descendentis circuli huiusmodi centru messe.



Cōmunis sectio superficiei sphæricæ & plani eam secantis sit linea a b g, quam dico esse circumferentiam circuli. Planum enim secans aut per centrum sphæræ incedit, aut non. Si p centrum eius, quoniā omnes rectæ lineæ à centro sphæræ ad ipsam sectionem cōmunem in plano huiusmodi eductæ, æquales sunt, diffinitione sphæræ id confirmante, manifestū q plaaum intra lineam a b g conclusum est circulus, ipsaq; linea a b g circumferentia eius. Si uero planum prætereat centrū sphæræ, demittatur à centro sphæræ, quod sit 3, ad ipsum planum perpēdicularis recta linea 3 h, à cuius pede scilicet puncto h, lineæ rectæ quotlibet educantur ad sectionem prædictam

dictam, sintq; tres huiusmodi h a, h b & h g, protractis semidiametris sphæræ 3 a, 3 b & 3 g. Trium itaq; triangulorum a h 3, b h 3 & g h 3 unusquisq; angulum iuxta 3 rectum habet, propter lineam 3 h perpēdiculariter plano incidentem, latera autem rectos angulos subtendentia, sunt semidiametri sphæræ æquales, dempto igitur quadrato perpendicularis singulatim à quadratis semidiametrorum remanebunt per penultimã primi & cõmunem scientiã quadrata trium linearum h a, h b & h g æqualia; unde & lineas ipsas æquales esse oportet. Non aliter ꝓbabis alias lineas quotlibet à puncto h ad sectionem cõmunem eductas sibi & tribus lineis iam memoratis æquales esse. diffinitio igitur circuli theorematis concludet ueritatem. ¶ Ex his aũt & diffinitione centri trahitur pedem demissæ perpendicularis esse centrum circuli iam dicti, quod pollicebatr̃ corollariũ.

II.

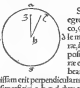
Omnis linea recta à centro sphæræ ad centrum circuli minoris in ea producta, perpendicularis est ad superficiem ipsius circuli.



Hæc conuertit corollarium præcedentis. Sit circulus minor a b g d in sphæra signatus, cuius centrum h, quod cum cum centro sphæræ 3 copulabo per lineam 3 h. Dico, φ linea 3 h perpendicularis est ad superficiem huius circuli. Productis enim duabus semidiametris a g & b d circuli minoris, terminos earum centro sphæræ copulabo per semidiametros sphæræ a 3, b 3, g 3 & d 3. per diffinitionẽ igitur circuli & sphæræ linea 3 h cõmuni existente ex 8 primi omnes anguli, quos facit linea 3 h cum lineis sibi in superficie circuli minoris conterminalibus sunt recti. quare linea 3 h perpendiculariter incidit duabus diametris a g & b, & ideo per 4. undecimi perpēdicularis est ad superficiem circuli a b g d, quod libuit deducere. Qd' autem linea à centro sphæræ superficiei circuli minoris perpendiculariter incidens, ad centrum ipsius circuli minoris terminetur, ex processu primæ huius satis didicimus.

III.

Linea recta, quæ à centro circuli in sphæra positi, orthogonaliter egreditur, centrum sphæræ necessario continebit.

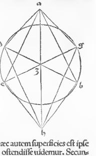


Sit circulus in sphæra a b d g, cuius centrum h, à quo egrediatur orthogonalis linea h k utrunq; indefinita. Dico, φ in ea centrum sphæræ reperietur. Si enim circulus ille maior extiterit, cum centrum eius sit centrum etiã sphæræ, à quo orthogonalis ipsa nascitur, planum est quod ꝓposuimus. Si autem fuerit circulus minor, & centrũ sphæræ extra orthogonalem, sententia quidem aduersarij habeatur, sit ipsum x, producta igitur linea x h, per præmissam erit perpendicularis ad superficiem circuli a b g d. ab uno itaq; puncto h superficiei a b g d duæ orthogonales egrediuntur, quod est impossibile, & contra undecimi, quo interempto, relinquitur ueritas conclusionis nostræ.

Omnis

IIII.

Omnis linea recta à polo circuli ad eius centrum demissa, perpendicularis ad superficiem circuli conuincitur, productaque ultra circuli centrum, donec superficiei sphæricæ obuiabit, reliquum circuli polum offendet.



Sit circulus d e b g, cuius quidem polus sit a punctus, centrum uero 3, demittaturque à polo a ad centrum 3 linea a 3 quā dico esse perpendicularem ad superficiem circuli. Duarum enim diametrorum d b & e g terminos cum puncto a copulabo per lineas a d, a e, a b & a g, quo fit, ut trianguli a b 3 & a d 3 bina latera sint æqualia, a 3 enim commune est ambobus, 3 b autem & 3 d sunt semidiametri eiusdem circuli, duas demum bases a d & a b æquales affert poli diffinitio. quare angulus a 3 d æqualis est angulo a 3 b, & ideo a 3 perpendicularis est ad lineam d b. Similiter probabimus eandē a 3 perpendicularem esse ad lineam 3 g. cum itaque triū linearum conterminaliū una duabus reliquis orthogonaliter insistat, erit ipsa perpendicularis ad superficiem reliquarum duarum argumento 4. undecimi. hæc autem superficies est ipse circulus d e b g, primam igitur theorematis partem ostendisse uidemur. Secundæ uero parti assenties, si linea a 3 usque ad punctū superficiei sphæricæ h producta, ipsum h punctum omnium diametrorū terminis coniunges. omnes enim facti trianguli, quibus uertex cōmunis est, centrum circuli 3 bina latera habēt æqualia, h 3 enim commune, reliqua uero sunt semidiametri eiusdem circuli, sed & anguli eorum apud punctum 3 æquales sunt, quia recti: quare bases dictorum triangulorum uniuersæ æquabuntur, per diffinitionem igitur h punctus circuli dicti polus habebitur, quod erat lucubrandum.

V.

Omnis recta linea à centro circuli in sphæra orthogonaliter exiēs, per polos eius utrinque continuata transibit.

In figuratione præhabita intelligatur lineam 3 a orthogonaliter à centro circuli 3 exiuisse, reliquis ut antehac conseruatis. Dico, duo puncta a & h esse polos circuli d e b g. Quia enim linea a 3 orthogonalis est ad superficiē circuli, per centrum eius transiens, erit ipsa per conuersionē diffinitionis orthogonalis ad omnem circuli semidiametrū. posito igitur quadrato 3 a communi, cum omnia quadrata semidiametrorū sint æqualia, erunt per penultimā primi & cōmunem animi conceptionem quadrata omnium linearū ab a puncto ad circumferentiā circuli demissarum æqualia, & ideo ipsæ lineæ æquales. per diffinitionem ergo poli constabit ueritas propositionis. Idem similiter concludere de puncto h licebit.

VI.

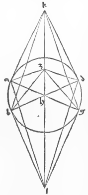
In linea recta centrū sphæræ cū centro circuli minoris in ea signati cōtinuāte, si quātū oportet utrinque prolōgetur, ipsius circuli polos inueniri

I Circuli

Circuli minoris a b g d in sphæra constituti cẽtrum sit h, quod cum centro sphæræ 3 continuetur per lineam h 3. Dico, q̃ in linea h 3 quantũ sat est protogata, duos polos circuli a b g d reperiemus. Erit enim per 2 huius linea h 3 perpendicularis ad superficiẽ circuli dicti, quare per tertiã huius utrinq; continuata, donec superficiei sphæricæ occurrat ad duos circuli memorati polos terminabitur. Quatuor itaq; huiusmodi puncta, centrum uidelicet circuli minoris in sphæra intellecti, centrum sphæræ & duos circuli minoris polos in una semper recta linea reperiri necesse est, quod erat explanandum.

VII.

Quæcunq; linea recta per polos circuli in sphæra signati transiuerit, per centrum quoq; ipsius transire, ipsiq; circulo orthogonaliter incidere cogitur.



Figuratio 7. & 8.

Linea k l transiens per duos polos k & l circuli a b g d, secet eum in puncto 3. Dico, q̃ punctus 3 sit centrum circuli a b g d, & q̃ linea k l orthogonaliter incidat circulo a b g d. A puncto enim 3 egrediantur plures q̃ duæ rectæ lineæ ad circumferentiã circuli dicti, quæ sint 3 a, 3 b, 3 g & 3 d, quarum terminos utriq; polorum connectemus per lineas polares duplices concludendo quatuor triangulos uerticem cõmunem habentes polum k, bases autẽ quatuor polares lineas à polo l deriuatas, quo fit, ut anguli eorum apud polum k 8. primi arguente, æquales habeãtur, angulus uidelicet a k l æqualis angulo b k l, & ita de cæteris. Trãsferamus nos demum ad quatuor triangulos, quibus latus k 3 cõmune est, reliqua uero latera æqualia habentes quatuor scilicet polares lineas ab ipso polo k desceden tes, qui cum angulos suos apud k æquales habeãt, quemadmodum ostendimus per 4. primi, & bases habebunt æquales, lineas uidelicet 3 a, 3 b, 3 g & 3 d, quare per 9. tertij punctus 3 erit centrum circuli a b g d. primam igitur theorematis partem roborauimus. unde & per quartam huius secundæ par ti assentire compellimur, linea k l per polum centrumq; circuli dicti transeunte, quæ uolebamus declarare.

VIII.

Linea recta quæ per duo quatuor punctorum dictorum incedit, reliqua duo præterire non poterit.

Quatuor illa puncta notamus centrum sphæræ, centrum circuli minoris in ea & duos polos eius. Sit itaq; circulus minor in sphæra quatuor characteribus a b g d repræsentatus, cuius centrum h, duoq; poli k & l, centrum autem sphæræ sit 3. Dico, q̃ linea recta duo eorum quæcunq; continens, & reliqua duo, si satis porrecta fuerit, complectetur. Nam, ut à capite initium sumamus, polum k & centrum sphæræ 3 in linea k 3 statuamus, extensaq; k 3 occurrat circulo a b g d in

puncto

puncto h, cui nondum nomen centri imponimus, producantur denique lineae polares k a, k b, k g & k d, item semidiametri sphaerae 3 a, 3 b, 3 g & 3 d, sed & lineae a h, b h, g h & d h, satis tamen erat trinas huiusmodi non quaternas producere. quatuor igitur trianguli in uertice k cõmunicantes, quorum bases sunt quatuor semidiametri sphaerae, cum sint aequilateri per diffinitionem sphaerae & poli, linea k 3 cõmuni existente, per 8. primi erunt aequianguli, postea uero quod angulos eorum apud k aequales esse didicimus ad quatuor triangulos, quibus & dicti anguli cõmunes sunt, bases autem quatuor in puncto h confluentes, transeundum est, qui cum bina latera, quatuor dictos aequales angulos ambientia, habeãt aequalia per diffinitionem poli, linea k h cõmuni existente, per quartã primi bases habebunt aequales. a puncto igitur h plures quam duae lineae aequales exeunt ad circumferentiã circuli a b g d: quare per 9. tertij h centrũ erit circuli praedicti, & ipsum est in linea k h indeterminata, in qua cum habeatur etiam centrum sphaerae, concludimus per praemissam reliquũ quatuor punctorum uidelicet polum l in ea reperiri. Ponantur demum duo puncta, k polus & h centrum circuli minoris in linea k h, erit itaque per 4. huius linea k h perpendicularis ad superficiem circuli a b g d, quare per tertiam & quintam huius reliqua duo puncta, centrum uidelicet sphaerae & polus l in linea k h indefinita reperientur. Quod si duos polos k & l in linea k l statuerimus, conclusionem nostram probaturi quatuor puncta a b g d ipsi polo l per lineas suas, quemadmodum figura docet, connectemus. quae cũ sint aequales diffinitione poli id exigente, similiter & quatuor lineae polares a polo k deriuatae, sibi inuicem aequentur, linea k l cõmuni existente quatuor trianguli s a k l, b k l, g k l & d k l, erunt quatuor eorum anguli apud polum k aequales. Rursus propter angulos huiusmodi aequales, lineasque polares superiores aequales, linea k h communi assumpta, ex quarta primi quatuor bases a h, b h, g h & d h aequales conuincemus. per 9. igitur tertij h centrum erit circuli a b g d: unde & per supradicta centrum sphaerae in ipsa linea k l necessario reperietur. Postremo in linea 3 h, quemadmodũ ex praemissa trahitur, necessario reperiuntur duo poli circuli a b g d, sed in linea 3 l continebitur, & centrum circuli h & polus eius k, quod non aliter quam de linea k 3 confirmandum erit. similiter quod circa lineã k h diximus, lineae quoque l h attribuemus. Ex quatuor autem saepedictis punctis nõ nisi sex eliciunt cõbinatiões quas enumerauimus, uerũ igitur est quod propositimus.

IX.

Circulum in eadem sui parte duos habere polos est impossibile.

Quilibet circulus ex sphaera ipsum continente duas scindit partes, quarũ unã supra, reliquã autẽ infra se relinquit. Dico itaque, quod in neutra illarum duos circuli unius polos reperire est possibile. Nam si ita opinaberis, cõtinuemus ipsos cũ centro circuli per duas rectas lineas, erit igitur utraque earum orthogonalis ad superficiem circuli per huius, cumque ab uno puncto scilicet centro circuli exurgant, metietur nobis undecimi Euclidis, quod est inconueniens. Non ergo uerum est quod putabas. Sonat autem haec conclusio de polis in superficie unius sphaerae signãdis, nõ enim me latet eundẽ circulũ in multis contineri posse sphaeris se secantibus, in quarum superficiebus licebit ex eadem etiam parte circuli multos assignare polos. quotquot autem signaueris polos, huiusmodi una linea recta orthogonaliter a centro circuli egrediens, omnes eos complectetur.

X.

Si lineam polarem circulus quispiam diametro sphæræ potentialiter subduplam habuerit, ipse circulus maior erit.



Sit a polus circuli in sphæra signati, cuius linea polaris a d quadratum habeat subduplũ quadrato diametri sphæræ. Dico, ꝙ circulus ille erit maior. Ducatur enim ab a polo per centrum circuli dicti, quod sit 3 linea a 3, quæ continuata occurrat superficiei sphæræ in puncto g, erit itaqꝫ a g diameter sphæræ, nam per quartã & tertiam huius ipsa incedit per centrũ sphæræ. Intelligatur deinceps superficies plana transiens per lineas a d & a g, secando sphæram. fiet autem cõmunis sectio circumferẽtia, circuli quidem ex prima huius, magni uero per diffinitionem, habebit enim & centrum & diametrum sphæræ. diameter autem circuli in sphæra signati sit linea d 3 b, & linea polaris secunda g d. Quoniam igitur quadratum a g duplum est quadrato a d per hypothesim. quadratũ autem a g duobus quadratis linearum a d & d g æquale est per penultimã primi, ꝙ angulus a d g in semicirculo rectus sit, erit quadratum a d æquale quadrato d g, & ideo linea lineæ æqualis, uterqꝫ autem angulorum a 3 d & g 3 d est rectus per 4. huius & diffinitionem lineæ perpendicularis ad superficiem, linea igitᷓ d 3 communi, erit per penultimã primi & cõmunem scientiã quadratũ a 3 æquale quadrato 3 g, & ideo costa a 3 costæ 3 d æqualis. est autem a g diameter sphæræ, ut supra declarauimus, necessario igitur 3 centrum circuli signati erit centrum sphæræ: per diffinitionem itaqꝫ circulus ille maior est. Quandocunqꝫ ergo linea polaris circuli cuiusdam potentialiter subdupla est diametro sphæræ, aut æqualis costæ quadrati magno circulo sphæræ inscriptibilis, ipse circulus maior est, quod expectabas declarandum.

X I.

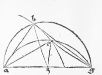
Omnis circulus maior in sphæra lineam polarem utranqꝫ habet potentialiter subduplam diametro sphæræ, æqualemqꝫ lateri quadrati, quod ipsi circulo magno inscribitur. Vnde manifestum est arcum circuli magni, à polo ad circumferentiam circuli signati demissum, esse quadrantem circumferentiæ suæ.

In figura præcedentis addo duas lineas a b & b g, intelligendo 3 centrum & lineam b 3 d diametrum circuli in sphæra signati. Dico, ꝙ utraqꝫ linearũ a b & b g polarium potentialiter subdupla est diametro sphæræ, & æqualis lateri quadrati, magno circulo ipsius sphæræ inscriptibilis. Erit enim per 4. huius unusquisqꝫ quatuor angulorum apud 3 rectus, quatuor itaqꝫ trianguli, quibus uertex communis est punctus 3, bina latera habentes æqualia, semidiametros scilicet sphæræ, per 4. primi bases habebunt æquales, unusquisqꝫ autem angulorum toralium, qui apud puncta a b g d sunt, rectus declaratur ex 30. tertij. per diffinitionem igitur a b g d quadratum est, inscriptum quidem circulo maiori a b g d; sicqꝫ secunda pars theorematis ostensa est, unde & per penultimã primi confirmabimus primam partẽ

mam partem. Corollariũ autẽ nemo dubitabit postq̃ ex tertij quatuor cordas æquales, costas scilicet quadrati prædicti, quatuor arcus æquales abscindere declarabimus,

XII.

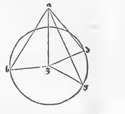
Si ab aliquo puncto superficiei sphæræ duo quadrantes duarum circumferentiarum magnarum egredientes, ad eundem arcum circuli magni terminentur, punctus ille erit polus circuli, ad cuius arcum dicti quadrantes terminantur.



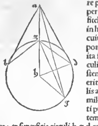
Sit punctus a in superficie sphæræ signatus, à quo egrediantur duo quadrantes circumferentiarum magnarum angulariter coniuncti, qui sint a b & a c, & terminentur ad arcum circuli magni b c. Dico, q᷑ a sit polus circuli magni, cuius erat arcus ille b c. Producam enim per centrum sphæræ 3 diametrum a 3 g, complendo duas semicircumferentias magnas a b g & a c g. item binas cordas duorum quadrantum dictorum & duorum quadrantum residuorum, qui sunt g b & g c. duas postremo semidiametros circuli b c, quæ sint 3 b & 3 c. Quoniam igitur duo trianguli a 3 c & c 3 g bina latera habent æqualia, duasq́ꝫ bases suas a c & c g per præcedentem æquales, erunt per 8. primi duo eorum anguli apud 3 æquales: quare duæ lineæ a 3 & 3 c ꝑpendiculariter sibi inuicem insistunt. Non aliter declarabitur lineam a 3 perpendiculariter insistere lineæ 3 b. per 4. igitur undecimi linea a 3 ꝑpendiculariter incidit superficiei complectenti duas lineas 3 b & 3 c, quæ quidem superficies est ipse circulus magnus, quem supra notauimus, & ideo per 5. huius punctus a erit polus circuli b c, quod erat demonstrandum.

XIII.

Si à puncto superficiei sphæricæ ad circumferentiam circuli cuiuscunq; in sphæra signati, plures q̃ꝫ duæ æquales rectæ lineæ descenderint, punctus ille dicti circuli polus habebitur.



Sit punctus a in superficie sphærica notatus, à quo ad circumferentiã circuli b g d plures q̃ꝫ duæ æquales rectæ lineæ descendãt, quæ sint uerbi gratia tres a b, a g & a d. Dico, q᷑ a sit polus circuli b g d. Demittatur enim ab a puncto ad superficiem circuli b g d, per 11. undecimi perpendicularis a 3, cuius pedi puncto scilicet 3 tria puncta b g d copulabimus per tres lineas 3 b, 3 g & 3 d, claudendo tres angulos a 3 b, a 3 g & a 3 d, quorum angulos apud 3 punctum rectos esse oportet, conuersa diffinitione lineæ perpendicularis ad superficiem. cum itaq; tres lineæ æquales ad circumferentiam circuli descendentes, illos rectos subtendant angulos, per penultimam primi & cõmunes scientias linea a 3 communi existente, tribus dictis triangulis tres lineæ 3 b, 3 g & 3 d æquales habebuntur: qua



re per 9. tertij z erit centrum circuli b g d, & ideo per 5. huius punctum a esse polū circuli b g d confiteberis, quod libuit attingere. Assumpsimus autē in hoc processu punctum z cadere intra circulum cuius rei certitudinē accipies hoc pacto. Non enim potest punctus z esse in circumferentia circuli, si enī ita fuerit sententia quidem aduersarij, à centro circuli, quod sit h, in nulla lineatū z b, z g & z d existente, ducantur tres semidiametri h z, h g & h d, erit itaq; per octauam primi angulus z h d æqualis angulo z h g, pars toti, quod est impossibile. Simile inconueniens concludemus aduersario putanti punctum z extra circulum cadere, huiusmodi autem impossibilibus interemptis, reliquū est, ut punctus z in superficie circuli b g d reperiatur.

XIIII.

Omnes duæ superficies planæ in puncto uno communicantes, in linea quoq; recta per punctum ipsum incedente, si indefinitæ extendantur cōmunicabunt, hæc autem linea communis earū sectio habebitur.

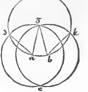


Sit punctus a communis duabus planis superficiebus. Dico, q ipsæ superficies, si indefinitæ extendantur, in linea per a punctum transeunte, cōmunicabunt, & in ea linea se intersecabunt. Intelligatur enim tertia superficies plana duas prædictas in puncto a communi secans, fiatq; sectio cōmunis superficiei tertiæ cum altera propositarum, linea recta b a g per 3. undecimi, quæ si fuerit, etiam in reliqua constabit prima pars theorematis. Si uero non sit communis sectio huius tertiæ superficiei, & reliquæ duarum propositarum linea d a h, educaturq; à puncto a in superficie tertia linea a k, argumento igitur 13. primi duo anguli d a k & k a h duobus rectis æquiualent. similiter duo anguli b a k & k a g duos ualēt rectos, quare duo recti minores erunt duobus rectis, quod est impossibile. quo interempto, primam propositionis partem astruemus. Similiter probabimus, q duæ superficies illæ in linea communi prædicta se intersecabunt. Si enim non intersecent se in ea, intelligatur tertia superficies secans prædictas duas, non quidem in linea communi iam dicta, sed in alia. secet autem & hæc tertia superficies lineam in qua communicāt duæ propositæ superficies in puncto à, à quo educatur linea a k in superficie tertia, quo facto, duos angulos rectos duobus angulis rectis minores esse concludemus, quod est impossibile. Non possunt igitur duæ propositæ superficies nō communicare in linea recta, & in ea se intersecare, quod erat lucubrandum.

XV.

Per duo puncta in superficie sphæræ signata, circulum magnum producere.

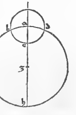
In superficie sphæræ notentur duo puncta a & b, per quæ si producendum uelis circulum magnum super puncto a tanq; polo, secundum quantitatem costæ quadrati



quadrati magno circulo ſphæræ īſcriptibilis, quæ ſit a d, deſcribe circulum e d g. ſecundum eandē quoq; quantitatem, ſcilicet ſecundum lineā d b k, æqualem ipſi a d ſuper polo k circulum e g k deſcribas, hos duos circulos ſe inuicem ſecare ex præmiſſa liquet, q͗ centrum ſphæræ cōmune habeant. ſecent igitur ſe circumferentiæ eorum in punctis e & g, quorum alterum uidelicet g duobus punctis a & b copulabo per lineas a g & b g, quas neceſſe eſt eſſe æquales, & utranq; earum æqualem eſſe lineæ a d aut b k coſtæ ſcilicet quadrati magni. duæ enim polares lineæ a d & a g æquales ſunt, ponebatur autem b k æqualis ipſi a d, quare & a g æquabitur lineæ b k, cui etiam b k æqualis exiſtit: ſunt enim b g & b k lineæ polares, ab eodem polo unius circuli deſcendentes. circulus igit̄ deſcriptus ſuper g puncto tanq̄ polo, trāſibit per utrūq; punctorum a & b, magnus autem erit per 8. huius, q͗ linea polaris ſua g a æqualis ſit coſtæ quadrati magni. Quo igitur pacto ꝓpoſitum efficere oporteat, ſatis oſtendimus.

XVI.

Circulus magnus per unum polum alterius circuli incedens, per reliquum quoq; tranſibit polum.

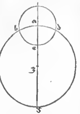


Circulus magnus a b g d per polum a circuli b e d tranſeat. Dico, q͗ tranſibit etiam per reliquū eius polum. Continuemus enim polum a cum centro 3 circuli magni prædicti, quod & ſphæræ ipſi commune eſt per lineam a 3, quæ producta amplius, donec ſuperficiei occurret ſphæricæ per 4 aut 7. huius, reliquum polum circuli b e d offendet, qui ſit h. Si itaq; linea 3 h pars ſcilicet lineæ a h fuerit in ſuperficie circuli magni a b g d, uerū enunciabat ꝓpoſitio: ſi uero non, lineæ rectæ a h pars erit in plano, & pars in ſublimi, quod eſt impoſſibile per primam undecimi. Circulus igitur a b g d, per polum a circuli b e g tranſiēs, reliquum eius polum præterire non poterit, quod libuit declarare.

XVII.

Circulus magnus in ſphæra per polum alterius circuli tranſiens, eum per æqualia & orthogonaliter ſecabit.

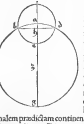
Sit circulus magnus a b g d, cuius centrum 3 tranſiens per polum a circuli b e d. Dico, q͗ circulus a b g d ſecabit circulum b e d per æqualia & orthogonaliter. Ducatur enim à polo a ad centrum 3 circuli a b g d: quod & ipſi ſphæræ eſt commune; linea a 3, quæ cum ſit in ſuperficie circuli a b g d, & trans



& tranſeat per centrum circuli b e d, ex diffinitione quidē circuli magni, ſi b e d circulus magnus fuerit, aut per ſeptimam huius, ſi minor, neceſſe quoque erit, ut circulus a b g d [illegible] centrum circuli b e d tranſeat, quare ſecabit eum per æqualia. Præterea quoniam linea a ʒ ex polo a ad centrū circuli b e d deſcendit (ſiue illic quieſcat, ſiue ultra porrigatur, nihil refert) erit ipſa per quartam huius perpēdicularis ad ſuperficiem circuli b e d. quare per 18. undecimi ſuperficies circuli a b g d per ipſam lineam a ʒ incedens, orthogonalis erit ad ſuperficiem circuli b e d, quæ fuere lucubrāda.

XVIII.

Si quis in ſphæra circulus alium per æqualia & orthogonaliter ſecuerit, ipſe magnus erit, & per polos eius quem ſecat tranſibit.



Hæc conuertit præmiſſam. Circulus a b g d ſecet circulum b e d ꝑ æqualia & orthogonaliter. Dico, ꝙ circulus a b g d magnus eſt. Sit enim cōmunis eorum ſectio linea b d, quam oportet eſſe diametrum circuli b e d, quemadmodum ex hypotheſi trahitur, cuius punctus h ſit centrum circuli b e d, à puncto autem h in ſuperficie circuli a b g d egrediatur orthogonalis ad diametrū b d, quæ etiam orthogonalis erit ad ſuperficiem circuli b e d, ex diffinitione ſuperficiei orthogonaliter ſupra ſuperficiem erectæ & quarta undecimi. quare per quintam huius orthogonalis illa tranſibit per polos circuli b e d, unde & circulus a b g d orthogonalem prædictam continens per polos huiuſmodi inceder. Item ꝑ 3 huius ipſa orthogonalis tranſibit per centrum ſphæræ. ſi igitur utrinq; ad ſuperficiem ſphæræ aut circumferentiam circuli a b g d porrecta fuerit, ipſa erit diameter: ſphæræ quidem per diffinitionem, circuli autem a b g d, ꝙ per centrum eius tranſeat aut per corollarium primæ tertij. ſecat enim cordam b d per æqualia & orthogonaliter: ꝑ diffinitionē igiť circulus a b g d magnus eſt, quæ oportuit explanare.

XIX.

Omnes circuli magni in ſphæra per æqualia ſe inuicem ſecant.

Commune enim omnibus circulis magnis in ſphæra diffinitur centrum ſphæræ. quicunq; igitur duo circuli in hoc uno puncto participāt, & in linea recta punctum ipſum recipiente, tanq; ſectione communi participabunt 12. huius confirmante. hæc autem ſectio communis utriuſq; circulorum erit diameter, utrunq; eorū ꝑ æqua ſcindēs, quare & ipſi ꝑ æqua ſe ſcindent, ꝗd noſtra enūciabat cōcluſio.

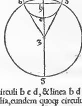
XX.

Omnis circulus magnus per polos circuli in ſphæra magni ad quē ipſe erectus eſt tranſibit.

Linea nanque à centro eorum communi (omnes enim circuli magni in centro sphæræ participant) ad sectionem communem in altero eorum orthogonaliter egrediens ad reliquum, erit orthogonalis per diffinitionem supeficiei supra superficiem erectæ & quartam undecimi. quare per quintam huius ad polos eius perueniet. cumque ipsa superficiem circuli erecti non egrediatur, necessario ipse circulus erectus circuli substrati polos complectetur, & hoc decuit confirmare.

XXI.

Quicunque circulus magnus alium in sphæra minorem circulum orthogonaliter secat, ipsum quoque per æqua partietur. & si per æqualia scindet, orthogonaliter eum secabit. Vnde polos circuli minoris præterire non poterit circulus ipse magnus.

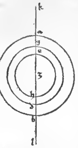


Secet enim circulus magnus a b g d, cuius centrum z circulum minorem b e d orthogonaliter secundum lineam b d. Dico, quod secabit eũ per æqualia, quem si per æqua secuerit, orthogonaliter quoque secuisse prædicabo. Diuisa enim sectione cõmuni b d per æqualia in puncto h, ducatur à centro sphæræ circuli magni a b g d, quod est z, ad punctum h linea z h, quæ ex diffinitione sphæræ & octaua primi ductis duabus semidiametris z b & z d, perpendicularis erit ad sectionem communem b d. quare per diffinitionem superficiei erectæ ad superficiem & quartam undecimi linea z h orthogonalis erit ad superficiem circuli b e d, & ideo per corollarium primæ huius punctus h erit centrum circuli b e d, & linea b d diameter eius, quæ cum secet circulum b e d per æqualia, eundem quoque circulus a b g d secabit per æqualia, quod asseruit prima pars theorematis. Secet denique eũ per æqualia, linea d b diametro circuli minoris existente, in qua punctus h centrum eius accipiatur, quod cum centro z circuli magni & sphæræ ipsius copulabimus per lineam z h, quam ex secunda huius perpendicularem esse oportet ad superficiem circuli b e d. quare & per 18. undecimi superficies circuli a b g d ad ipsam orthogonalis erit. Circulus igitur a b g d circulũ b e d orthogonaliter secabit, quod erat exponendũ. Necesse autẽ est, ex utraque hypothesi & eis quæ in processu præsenti recitauimus, lineam z h utrinque superficiei sphæricæ occurrentem circuli b e d polos inuenire, cũque ipsa superficiem circuli a b g d egredi non possit, ipse circulus a b g d maior polos circuli minoris non præteribit, quod pollicebatur corollarium.

XXII.

Omnes circuli in sphæra, quibus eidem sui poli sibi inuicem æquedistant: & si fuerint æquedistantes quotlibet circuli, duos polos habebunt communes. Vnde patet, quotlibet circulorũ in sphæra æquedistantiũ centra cum polis suis in una reperiri linea recta.

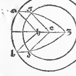
Sint tres aut plures circuli quotlibet a b g d, & e h in sphæra una, quibus duo poli k & l cõmunes existant, Dico quod ipsi inter se æquedistabunt, qui si ponantur



æquedistantes in polis duobus cõmunicabunt. Continuabo enĩ duos polos k & l per lineam k l, quæ p 7. huius transibit p centrum sphæræ, centra'q; omnium circulorum æquedistantium, quare per quartã huius uniuersis circulis orthogonaliter incidet, & ideo per undecimi circuli dicti inter se æquedistabunt, quod enunciabat prima pars theorematis nostri. Sed ponamus eos æquedistantes, pducamus'q; à centro sphæræ ad centrum unius eorum lineam rectam, quæ per 2. huius ppendicularis erit ad superficiem circuli, ad cuius centrum ipsa pducitur. Hæc autem linea utrinq; ad supeficiem sphæræ extensa, reliquis omnibus circulis æquedistantibus ppendicülariter incidet ex hypothesi & undecimi, quare per corollarium primæ huius per centra singulorũ transibit, & ideo ex 5. huius per polos omnium incedet, cumq; polos in superficie sphæræ dũtaxat signare soleamus, ipsa autem sæpedicta linea in superficie sphæræ duo tantum offendit puncta, constat puncta huiusmodi esse polos omnibus circulis æquedistantibus communes, quod asserebat secunda pars ppositionis. Corollarium autem huius ex corollario primæ, & 7. huius confirmabitur.

XXIII.

Omnes duo circuli magni ex circulis in sphæra æquedistantibus, per quorum polos incedunt, arcus absumunt similes.

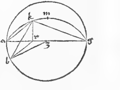


Sint duo circuli æquedistantes a b & g d in sphæra una, cõmunem ex præcedenti habentes polum 3, per quem & sibi oppositum polum incedãt duo circuli magni, quorum arcus duntaxat in figura hac posuisse satis est, qui sint 3 a & 3 g, secantes circumferentias circulorum æquedistantium, circuli quidem a b in punctis a & b, circuli uero d g in punctis g & d. Dico, q duo arcus a b & g d sint similes. Egrediatur enim à polo 3 ad polum sibi oppositum linea recta, quam constat esse cõmunem sectionem duorum circulorũ magnorũ in qua necesse est reperiri duo centra circulorum a b & g d ex corollario præcedentis. sit igitur h centrum circuli a b, & e centrum circuli g d, à quibus binæ educantur semidiametri ad quatuor puncta sectionum, quæ sint h a, & h b quidem circuli a b, e g autẽ & e d circuli g d. oportet autẽ has semidiametros esse in cõmunibus sectionibus duorum circulorũ magnorum & ipsorum æquedistantium, q puncta eas terminantia in utrisq; circulis existant. Quoniã itaq; circulus a g 3 secat duos circulos æquedistantes a b & g d, erunt per undecimi duæ lineæ a b & g e sectionis cõmunis æquedistantes, similiter duæ lineæ b h & d e æquedistabunt. duæ igitur lineæ a h & b h angulariter coniunctæ æquedistant duabus g e & d e angulariter coniunctis, & ideo per undecimi angulus a h b, æqualis erit angulo g e d, utriusq; ergo eorum ad quatuor rectos una est pportio, quæ quidem, ut ex ultima sexti trahitur, est tanq; utriusq; duorum arcuũ a b & g d

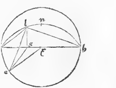
& g d ad ſuam circumferentiam. proportio itaq; arcus a b ad ſuã circumferentiam eſt ut arcus g d ad ſuam. per diffinitionem igitur duo arcus a b & g d duobus circulis magnis intercepti ſunt ſimiles, quod oportuit explanare. Non aliter ꝓcedemus, ſi plures ꝗ̃ duo æquediſtantes circuli nobis offerantur, niſi ꝙ media, quibus freti ſumus, quoties res ipſa popoſcerit ingeminemus.

XXIIII.

Si ſuper duas diametros duorum circulorum æqualium erigantur duæ portiones unius circuli æquales, aut duorum circulorum æqualium, ex ipſis autem portionibus accipiãtur duo arcus æquales, quorum uterq; minor ſit dimidio arcu portionis ſuæ, itemq; ex circũferentijs circulorum arcus æquales conterminales quidẽ arcubus portionum acceptis, lineæ rectæ continuantes extrema arcuum acceptorũ æquales erunt. & ſi lineæ ipſæ ſint æquales, arcus autem portionum æquales, minores tamen dimidijs arcubus ſuarum portionum, arcus quoq; circulorum æquales erunt.



Sint duo circuli a b g & d e h æquales, à quorum diametris a g & d h exurgant duæ portiões æquales a k g & d l h unius circuli, aut duorũ circulorum æqualium, orthogonales ad circulos ſubiacentes, quarum portionum uertices ſint puncta m & n, diuidentia arcus portionũ per æqualia, accipiaturq; ex una earũ arcus a k minor arcu a m, ex reliqua uero d l minor arcu d n, ſed & duo arcus a b & d e circulorum ſubſtratorũ æquales ſtatuantũ. ꝓductas itaq; lineas rectas b k & e l æquales, concludam hac argumentatione. A duobus pũctis k & l duas ꝑpendiculares k r & l s, demitto ad ſectiones cõmunes circulorum & portionum, punctaq; b & e pedibus ꝑpendicularium demiſſarum & centris circulorum copulabo, b quidem per lineas b r & b 3, e autem per lineas e s & e x, duasq; cordas k g & l h in portionibus ipſis ponã. Quia itaq; duo arcus a k & d l æquales ſunt, erũt duo anguli k g r & l h s æquales, uterq; autem angulorum apud puncta r & s rectus eſt, latus autem k g trianguli k g r æquatur lateri l h trianguli l h s ꝓpter duos arcus k g & l h æquales. quare per 26. primi duo latera reſidua trianguli k g r duobus lateribus reliquis trianguli l h s æqualia erunt, r g quidem ipſi s h & k r lateri l s. demptis ergo circulorum æqualibus ſemidiametris, relinquetur r 3 æqualis ipſi s x, eſt autem b 3 æqualis ipſi e x. ſunt enim ex hypotheſi duo circuli æquales, quorum ipſæ ſemidiametri habentur, angulus autem b 3 r æquatur angulo e x d ꝓpter arcus a b & d e, quos hypotheſis æquales ſubiecit, ultima ſexti cooperante: quare per quartam primi baſis b r trianguli b 3 r æquabitur baſi e s trianguli e x s. Cum autem utraq; linearum k r & l s demiſſa ſit perpendiculariter ad ſectionem cõmu-



nem ſuperficierum, ex diffinitione ſuperficiei ad ſuperficiem erectæ & quarta undecimi, erit utraq; earum perpendicularis ad ſuperficiem circuli ſibi ſubſtrati, & ideo per diffinitionem perpendicularis ad omnem lineam in ſubſtrata ſuperficie ſibi conterminalem. duo igitur anguli b r k & e s l recti ſunt, quos cum circundẽt æqualia latera quemadmodũ deductum eſt, erunt per 4. primi duæ lineæ b k & e l rectis angulis oppoſitæ æquales, quod enũciabat theorematis noſtri prima pars. Qđ ſi eas lineas ponendo æquales uelimus oſtendere æqualitatem arcuum a b & d e, reliquis ut antehac manentibus, hoc pacto ratiocinabimur, ꝓpter duas lineas b k & k r æquales duabus e l & l s; anguloſq; apud r & s rectos penultima primi & cõmunibus ſcientijs confirmantibus, linea b r æqualis erit lineæ e s, baſis uidelicet trianguli b r 3 baſi trianguli e s x, quorum etiam bina latera ſunt æqualia, quemadmodũ in priori proceſſu explanauimus, quare per 8. primi duo eorum anguli b 3 r & e x s in centris ſuorum circulorũ quieſcentes æquabuntur, & ideo per tertij duos arcus a b & d e æquales eſſe oportebit, quod ꝓmittebat ſecunda pars ꝓpoſitionis. Aduertendum tamen, ꝙ ſi ex erectis portiõibus arcus æquales abſumpſerimus, non minores, ſed maiores dimidijs arcubus ſuarum portionum cæteris ut antea manentibus, eandem per omnia paſſionem demonſtrabimus, ſyllogiſmo etiam non mutato. Præterea ſi erexeris ſemicirculos æquales, idẽ accidet, uerum ſemicirculis erectis, aut portionibus minoribus ſemicirculo ꝑpendiculares demittendæ occurrent diametris circulorum ſubſtratorũ, forma igitur ſuperioris argumentationis haud mutabitur. Si uero portiones ſemicirculo maiores ſtatuerimus, poſſibile erit ex eis abſcindere arcus æquales adeo paruos, ut perpendiculares ſupradictæ non offendant diametros ſubſtratorum circulorum, ſed occurrant eis extra circulos ſuos prolongatis, aut fortaſſe fient diametris conterminales. Poſtremo quod de duobus ſubſtratis circulis diximus, ad unicum applicare poterimus, ſiue ſupra diametrum eius unam portionem, ſiue plures erexerimus. Igitur ſecundum hæc uariabis parumper figurationem, ꝓceſſum autem demonſtratum, ſi ſupradicta ſatis tenueris, facile comparabis.

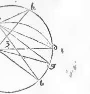
XXV.

Si ex portione ſupra diametrum circuli erecta arcum minorem dimidio arcu portionis abſumpſeris, omnium linearum rectarũ ab eius puncto terminali ad circumſerentiam circuli ſubſtrati demiſſarũ corda arcus abſumpti erit breuiſſima, corda autem reſidui arcus portiõis omnium longiſſima, reliquæ uero, quo breuiſſime ſunt uiciniores, eo ſunt remotioribus breuiores, æqualiter autem à breuiſſima remotæ, æquales habebuntur.

Sit circulus a b g d ſuper centro 3, cuius diameter a 3 d ſit corda portionis a h d orthogonaliter inſiſtentis circulo dicto, ſumaturq; arcus a h minor dimidio arcu portionis, à cuius puncto h ad circumferentiam circuli a b g d demittanẽ lineæ rectæ, h a quidem corda arcus h a, & h d corda arcus reſidui, itemq; quotlibet aliæ lineæ rectæ, quarũ duæ h b & h g inæqualiter à breuiſſima diſtantes, duæ uero h b & h k æqualiter ab ea remotæ, demonſtrationi perficiendæ ſufficient. Dico, ꝙ corda a h omnium demiſſarum linearum eſt breuiſſima, & corda d h omnium longiſſima, linea autem h b breuior linea h g, quod ſic accipias. A puncto h ad diametrum a d perpendicularis deſcendat h l, cuius pedi puncto

ſcilicet

scilicet l duo puncta b & g connectantur per lineas b l & g l, oportet autem punctum l distare à centro 3 uersus a punctum, quoniã ex primi huius casus a l minor est casu l d, ppter latus a h trianguli a h d, minus latere h d, quod comitatur hypothesim. puncto igitur l præter centrũ circuli a b g d signato, erit per tertij linea l a omnium ab eo puncto ad circumferentiam circuli egredientium linearum breuissima, l d autem omnium longissima, item l b breuior linea l g. Cum autem h l in superficie alterius duarum superficierum orthogonaliter se secantium, sectioni earum communi orthogonaliter insistat, erit ipsa



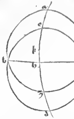
per diffinitionem superficiei ad superficiem erectæ, & quartam undecimi orthogonalis ad reliquam, & ideo per diffinitionem lineæ erectæ ad superficiẽ, ipsa erit orthogonalis ad omnem lineam sibi in reliqua superficie conterminalem, quare omnes anguli, quos ambiunt lineæ à puncto l egredientes, cum ipsa linea h l recti habebuntur. si igitur quatuor triangulos in latere h l communicantes notaueris, quorum reliqua latera sunt lineæ ab h puncto demissæ, & ab l puncto egredientes per penultimã primi & cõmunes animi conceptiones confiteberis lineam h a omnium demissarũ linearum esse breuissimam, & h d longissimam, h b uero breuiorẽ linea h g, & lineã h k æqualem h b, quæ pollicebamur demonstranda. Huiusmodi passionem demonstrabimus etiam de semicirculo erecto supra diametrum circuli, non aliter q̃ de portione quam minorem posuimus semicirculo, simile præterea accidit portioni maiori semicirculo, uerũ perpendicularis h l nõ semper residebit in diametro circuli substrati, nam possibile est abscindere arcũ ex huiusmodi portione adeo paruum, ꝙ perpendicularis dicta non occurrat diametro, nisi extra circulum prolongetur, aut fortasse cõcurret cum ea in termino suo, quod cũ euenerit, utemur & tertij in processu demonstratiuo, ubi pridem adduximus tertij, reliqua uero omnia prorsus repetemus.

XXVI.

Circulus magnus in sphæra transiens per polos duorum circulorũ se secantium, diuidit arcus separatos eorum per æqualia. & si diuiserit arcus eorum separatos per æqualia, transibit per polos eorum. ꝙ si arcus unius eorum per æqua partiatur, per polum alterius eorum transeundo, ipse quoq; arcus separatos reliqui diuidet per æqualia, & per polos amborum incedet.

Sint duo circuli in sphæra a b g & e b g qualescunq; secantes se in punctis b & g, per quorum polos incedat circulus magnus a e 3 d, secans binos arcus separatos circulorum a b g & e b g in punctis a, e, 3 & d. Dico, ꝙ arcus a b æqualis est arcui a g, & b 3 æqualis g 3. item duo arcus b e & e g inuicem, duoq; arcus b d & d g sibi æquales erunt. Polus nanq; circuli a b g sit k, & polus circuli e d g sit punctus h, à quo ad duo puncta b & g protrahantur duæ rectæ h b & h g, quas oportet esse æquales, h polo circuli e d g existente. Quoniam igitur circulus a e 3 d transit per polos amborum circulorum, ipse secabit utrunq;

 eorum



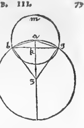
eorum per æqualia & orthogonaliter ex huius. quare portio a e 3 erigitur supra diametrum circuli a b g, ex qua abscindit arcus 3 h minor dimidio arcu portionis, à cuius termino h duæ rectæ æquales ad circumferentiam circuli a b g descendunt, fit igitur per huius arcus b 3 æqualis arcui 3 g. cunqꝫ uterqꝫ arcuum a b 3 & a g 3 sit semicircumferentia circuli, ꝙ circulus a e d transiens per polum circuli a b g, secet eum per æqualia, demptis utrobiqꝫ æqualibus arcubus, manebit arcus a b æqualis arcui a g. Non aliter ostendemus arcũ e b æqualem esse arcui e g, si portionem e h d supra diametrũ circuli e b g erectam esse intellexerimus, erit eñ arcus e k minor dimidio arcu portionis suæ, lineæqꝫ à puncto k ad duo puncta b & g demissæ, æquales probabuntur, k polo circuli a b g existente. Hinc etiam reliqui duo arcus b d & d g æquales ostendentur, primæ igitur parti theorematis assentire compellimur, sed pone circulum a e 3 d diuidere arcus separatos eorum per æqualia in punctis a e 3 & d. Dico, ꝙ transibit per polos eorum. Si enim non, transeat alius circulus magnus per polos eorum, quod quidem possibile est per & huius, qui per iam demonstrata transibit etiam per quatuor puncta a, e, 3 & d. secabunt ergo se duo circuli magni in sphæra in istis quatuor punctis, quare per huius unusquisqꝫ arcuum a e, a 3, e 3 & e d erit semicircumferentia, omnes autem semicircumferentiæ unius circuli æquales phibentur, pars igitur æqualis erit toti, quod est impossibile. Non potest ergo circulus alius transire per polos huiusmodi, nisi ille qui dicta quatuor puncta transcurrit. Cum itaqꝫ per omnia duo puncta in superficie sphæræ signata transire possit circulus magnus, ut ex huius didicimus, & nõ potest transire per duos polos k & h alius circulus præter eum, qui per quatuor puncta a, e, 3, d incedit, manifestum est, ꝙ circulus magnus per quatuor dicta puncta transiens, duos polos præterire non poterit, qui tandem ex huius per reliquos duos polos incedere cogitur, & illud ꝑponebat pars secunda. Postremo si circulus a e 3 d secuerit, uerbi gratia, arcum b a g per mediũ in puncto a, & trãsierit per polos alterius se secantium circulorum. Dico, ꝙ secabit & reliquũ ꝑ æqualia per polos amborum transeundo. Si enim non, secet eos alius quispiam ꝑ æqualia, aut transeat per polos eorum. ille igitur per polos amborum incedens, secabit arcus separatos eorum per æqualia. cõmunicabunt itaqꝫ duæ circumferentiæ circulorum magnorum in tribus punctis, uidelicet duobus polis alterius eorum & puncto a, eritqꝫ unusquisqꝫ arcuum inter duo quælibet puncta comprehensus, semicircumferentia per huius, unde sequitur partem suo toti æqualem esse, quod est impossibile. Non igitur stabit hæc hypothesis, nisi circulus ille transeat per polos amborũ, & secet utriusqꝫ arcus separatos per æqualia, quæ fuere demõstranda.

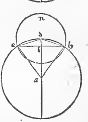
XXVII.

Omnes circuli secundum æquales lineas polares descripti in sphæra una, aut diuersis æqualibus tamen, æquales existunt. & si circuli æquales fuerint, lineas eorum polares æquari necesse est.

Si lineæ polares lateri quadrati magni æquales habeantur, constabit per 8. huius

huius & diffinitionem: omnes circulos & magnos & æquales inuicem esse. Sed ponamus eas minores aut maiores huiusmodi latere quadrati magni, sint q; a g & d h secundum quas duo circuli b m g & e n h in sphæra una, aut diuersis æqualibus tamen describantur, quos dico esse æquales. Transeant enim per polos eorum qui sint a & d duo circuli magni a b g, cuius centrum 3, & d e h super centro s, q per 15. huius secabũt descriptos circulos per æqualia & orthogonaliter, sintq; communes sectiones lineæ b g & e h, descendant demum à polis a & d aliæ duæ polares lineæ a b & d e p̃dictis duabus æquales, à centris autem circulorum binæ egrediãtur semidiametri 3 b & g 3 circuli a b g, s e autem & s h circuli d e h, erit igitur ex hypothesi & tertij arcus a g æqualis arcui d h, itemq; arcus a b æqualis arcui d e, quare per communem scientiam totus arcus b g toti arcui e h æqualis habebitur, & ideo per tertij corda b g, quæ est etiam diameter circuli b g m æqualis erit cordæ e h, quæ est diameter circuli e h, quare per diffinitionẽ circulorum æqualium patebit prima pars theorematis. Conuertendo autem processum iam recitatum, facile concludemus æqualitatem linearum polariũ, si prius circulos ipsos subiecerimus æquales, erunt enim duæ eorum diametri b g & e h æquales per conuersionem diffinitionis circulorũ æqualium, unde & per tertij arcus b g & e h, quorum ipsæ sunt cordæ, æquales inueniuntur. quare per cõmunem scientiam arcus eorũ dimidij a g scilicet & d h nõ erũt inæquales, & ideo per tertij cordæ suæ a g & d, quæ & polares lineæ sunt, æquales demonstrabuntur. utranq; igitur theorematis partem firmauimus, quod quidem studiosus expectabat discipulus.





XXVIII.

Omnes minores circuli æquales à centro sphæræ eos continentis æqualiter distant, & si ab eo centro æqualiter distiterint circuli minores quotlibet, ipsos æquales esse conuincemus.



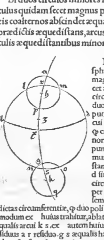
Sint duo circuli minores a b & g d. aut plures quotlibet in sphæra æquales. Dico, q; ipsi æqualiter distent à centro sphæræ, qui si fuerint æquedistantes à centro sphæræ, æquales necessario habebuntur. Primam partem sic confirmabimus. A centro sphæræ quod sit 3 ad centra duorũ circulorum h & k educantur duæ lineæ 3 h & 3 k, duæq; semidiametri sphæræ 3 b & 3 g, quarum duos terminos connectemus per lineas h b & k g, eritq; per huius utraq; linearum 3 h & 3 k perpendicularis ad superficiem circuli cui incidit, & ideo per diffinitionẽ perpendicularis ad semidiametrum sibi conterminalem, quare uterq; angulorum 3 h b & 3 k g rectus habetur. oportet autẽ

& semi

& semidiametros h b & k g esse æquales ,ppter circulos eorum, quos hypothesis æquales tradidit. per penultimam igitur primi & communes scientias erit 3 h linea æqualis 3 k , unde & per diffinitionem circuli dicti æqualiter à cētro sphæræ distabunt, quod intendebat prima pars ,ppositionis. Sed ponātur duo circuli prædicti æqualiter distantes à centro sphæræ, quamobrem oportebit duas lineas 3 h & 3 k esse æquales, unde ex medijs præassumptis duas semidiametros h b & k g æquales esse constabit. diametris ergo circulorum æqualibus existentibus, ipsi circuli per diffinitionem circulo⁊ æqualium æquales habebuntur , quod asseruit secunda pars theorematis. Poterimus autem & has mutuas passiones demonstrare de circulis diuersarum sphærarum æqualium tamen, non aliter quàm de circulis unius sphæræ.

XIX.

Si duos circulos minores in sphæra æquales & æquedistantes, circulus quidam secet magnus per polos eorum non transiens , arcus ex eis coalternos abscindet æquales. circulus præterea magnus duobus prædictis æquedistans, arcus circuli inclinati interceptos duobus circulis æquedistantibus minoribus per æqualia secabit.



Ex duobus circulis minoribus a l p & g n q in sphæra una æqualibus & æquedistantibus, circulus magnus l b o d per polos eorum non incedens, secet arcus coalternos l a m & n g o , quibus quidē circulis æquedistet circulus magnus b x d , secans duos arcus l n & m o circuli l b o d in duobus punctis b & d . Dico, q̄ arcus l a m æqualis est arcui n g o , & arcus l p m arcui n q o æqualis , & q̄ circulus magnus b x d æquedistans duobus minoribus, duos arcus l n & m o per æqua scindet in punctis b & d . Duos enim polos per huius communes esse oportet , tribus dictis circulis æquedistantibus, qui sint h & k , polus autem circuli l b o d sit punctus 3 . per duos itaq; polos h & 3 incedat circulus a h 3 k huius edocenre, qui transibit etiā per punctum k ex huius. Cum itaq; arcus r s sit semicircumferentia per huius, arcus'q; h k sit me dietas circumferentiæ, q̄ duo poli h & k diametrum sphæræ terminent , quemadmodum ex huius trahitur, ablato arcu communi h s , relinquetur arcus h r æqualis arcui k s . ex autem huius duo arcus k g & h a æquales sunt, quare & residuus a r residuo g s æqualis habebitur. Supra diametrum autem circuli l b o d erectæ sunt duæ portiones æquales, ex quibus sumuntur arcus æquales r h & s k , quorum uterq; minor est dimidio arcu portionis suæ , lineæ'q; à punctis h & k ad duo puncta m & o protensæ, æquales sunt per huius, quare per huius arcus a m æquabitur arcui s o , arcus autem r m æqualis est arcui l r , similiter arcus s o arcui s n , cum circulus a h 3 k per polos horum circulorum se secantiū transeat. Rursus quoniam supra diametros duorum circulorum a l p & g n q , erectæ sunt duæ portiones æquales a p & g q, ex qbus absumpti sunt arcus æquales a r & g s , quorum uterq; minor est dimidio arcu portionis suæ , lineæ uero à

punctis

punctis r & s ad puncta circulorum substratorum m scilicet & o protensæ sunt æquales, propter arcus r m & s o, quos æquales nuperrime conclusimus, erit per huius arcus a m æqualis arcui g o, arcus autem a m æquatur arcui a l, & arcus g o arcui g n propter circulum magnum a h 3 h, per polos circulorum secantium transeuntem. quare totus arcus l a m æquabitur toti arcui n g o, reliquusque l p m reliquo n q o non erit inæqualis. constat ergo prima pars propositionis nostræ. Postremo unusquisque quatuor arcuum r b, b s, s d & d r est quadrans circumferentiæ, quandoquidem circulus a h 3 k per polos duorum circulorum b l o d & b x d magnorum transit, à quibus singulatim quadrantibus, si dempseris quatuor arcus æquales l r, r m, n s & s o, relinquentur quatuor arcus l b, b n, o d & d m inter se æquales. utrumque igitur arcuum l n & m o circulus magnus b x d duobus minoribus æquedistans, per æqualia scindit, quod secundo loco demonstrandum extitit.

XXX.

Omnis anguli sphæralis ad quatuor rectos eam esse proportionẽ, quam basis eius ad circumferentiam suam.

Si ultimam sexti Euclidis satis uidisti, non latebit te nostri theorematis demõstratio, per habitudines enim æquemultiplicium usitato iuuabis te syllogismo.

XXXI.

Cuncti sphærales anguli, siue in sphæra una, siue diuersis, quorum bases sunt similes, sibi inuicem æquabuntur.

Erit enim basibus similibus ad suas circumferẽtias una proportio per cõuersionem diffinitionis arcuum similium, angulorũ autem ad quatuor rectos præcedens, eam cõclusit ꝓportionem, quam basium ad suas circumferentias, erit igitur omnium angulorum ad quatuor rectos una proportio, per 7. ergo quinti anguli ipsi æquales erunt, quod oportuit declarare.

XXXII.

Omnium angulorum æqualium bases inueniri similes.

Aequaliũ nanque angulorum ad quatuor rectos eandem constat esse proportionem, quæ quidem per huius est, ut basium ad suas circumferentias. basiũ igitͬ huiusmodi angulorum ad suas circumferentias eadem habetur proportio, quare per diffinitionem similiũ arcuum bases ipsæ similes conuincent, quod est ꝓpositũ.

XXXIII.

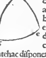
Quorum dissimiles sunt bases, angulos inæquales esse, angulorum quoque inæqualium dissimiles reperiri bases.

Hæc ex contrario subiecti præmissæ & ante præmissæ contrarium infert passionum suarum aduersarium ducendo ad impossibile. Si enim bases dissimiles admiserit, angulos autem æquales, erunt ex præmissa bases similes, igitur similes & dissimiles esse confitebitur easdem bases, quod est inconueniens. Quòd si angulis inæqualibus existentibus bases putauerit similes, sequitur ex antepræmissa & angulos esse æquales. quare eosdem angulos æquales inuicem & inæquales affirmabit, quod, quoniam repugnantiam parturit, esse non potest. Destructis autem impossibilibus, ueritatẽ ꝓpositionis inferemus.

XXXIIII.

Iuxta punctum quotlibet in superficie sphæræ signatum, angulo proposito æquum angulum statuere.

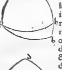


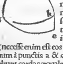


Sit angulus propositus b a g, cui iuxta pũctum d in sphæra quacunq; æqualem constituere libet. Angulo b a g substerno basim suam b g, deinde super puncto d secundum distantiam quantamlibet describo circulum, ex cuius circumferentia abscindo arcum e ȝ similem arcui b g, quod per 23 primi & ultimam sexti facile comparabis, duoq; puncta eius terminalia e & ȝ puncto d per duos arcus circulorum magnorum copulabo, qui sint d e & d ȝ, quos dico apud punctum d continere angulum æqualem angulo b a g, cuius ratio propter similitudinem duarum basium b g & e ȝ ex   huius manifesta apparet. Facilius tamen id efficies in sphæra una, aut diuersis æqualibus tamen. Super puncto enim d secundum distantiam a b circumduces circulum, ex cuius circumferentia arcum e ȝ abscindes æqualem arcui b g, reliqua ut antehac disponendo. Erunt enim duo circuli, ex quarum circumferentijs bases abscinduntur, per   huius æquales. cumq; bases ipsæ sint æquales, erunt etiam similes, per   igitur huius syllogismum conficies.

XXXV.

Omnium duorum triangulorum sphæralium, quorum cuncta latera unius cunctis lateribus alterius æqualia sunt, oẽs angulos æquis oppositos laterbus æquales esse.



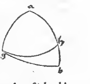


Omnes trianguli, de quibus futurum habebimus sermonem, in superficie unius sphæræ, aut duarum uel pluriũ æqualium tamen, ex arcubus circulorum magnorum constantes intelligemus. Sint itaq; duo trianguli a b g, & d e ȝ, quorum trina latera sunt æqualia, latus quidem b g unius lateri e ȝ alterius, & reliqua reliquis. Dico, ꝙ anguli æqualibus oppositi lateribus sunt æquales, angulus uidelicet a angulo d, & reliqui suis relatiuis. Si enim utriq; arcuum angulos a & d ambientium fuerint quadrantes, erunt duo puncta a & d poli circulorum b g & e ȝ per   huius, quare per   huius duo anguli a & d æquales erunt, ꝙ bases eorum sint similes, imò æquales. Si uero bini arcus dictos angulos continẽtes fuerint æquales, minores tamẽ quadrãte diuisim, descriptis duobus circulis super polis a & d secundum distantias æquales a g & e ȝ, circuli ipsi æquales erunt per   huius, arcus autem eorum ad bina puncta b g & e ȝ terminati (necesse enim est eos ad pũcta dicta terminari propter æqualitatem binorum arcuum à punctis a & d descendentium) arcus inq; illi æquales erunt, quoniam habebunt cordas æquales, ꝑpter arcus b g & e ȝ eis conterminales, quos quidem hypothesis subiecit æquales, quare per 21. huius anguli a & d æquales habebuntur. Qđ si bini arcus, qui ambiunt duos angulos a & d, inæquales fuerint, sint minores eorum duo arcus a g & d ȝ, superq; punctis a & d factis polis secundum distantias

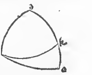
distantias æquales a g & d 3 describantur circuli g h & 3 k, quos constat esse æquales per huius, supra quorum diametros erectæ sunt duæ portiones æquales, ex quibus quidẽ portionibus accepti sunt duo arcus h b & k e æquales, quorum uterq; minor est dimidio arcu portionis suæ. b g autem recta linea, si producta fuerit, æquans est ipsi e 3, propter arcus b g & e 3 æquales, erit igitur per huius arcus g h æqualis arcui 3 k. illi autem duo arcus, cum sint bases duorum angulorum a & d, per huius angulos suos afferent æquales. Quemadmodum autem circa angulos a & d processimus, circa reliquos quoq; faciemus, & hæc in stituimus declaranda.

XXXVI.

Omniũ duorũ triangulorum, quorum duo latera unius duobus lateribus alterius sunt æqualia, angulusq; unius dictis lateribus cõtẽtus angulo alterius, basis quoq; unius basim alterius æquabit, reliqui demum anguli unius reliquis angulis alterius, quisq; uidelicet suo relatiuo æquabuntur.

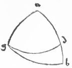


Trianguli a b g latus a b lateri d e trianguli d e 3 æquale habeatur, latus uero a g æquale lateri d 3, & angulus a æqualis angulo d. Dico, φ latus b g lateri e 3 æquabit. angulus etiam b angulo e, & angulus g angulo 3 æquabũtur. Si enim utrunq; laterum a b & a g fuerit quadrans circumferentiæ, similiter utrunq; laterum d e & d 3, erũt duo puncta a & d poli circulorum b g & e 3 per huius, cũq; positi sint anguli a & d æquales, erunt per huius bases eorum similes, arcus scilicet b g & e 3, & ideo æquales, φ circuli eorum æquales habeantur. Si uero bini arcus, qui duos angulos a & d ambiunt, inter se fuerint æquales, non tamen quartæ circulorum, necesse est circulos descriptos super polis a & d secundum distantias a g & d 3 transire per puncta b & e, eruntq; ex hypothesi & huius arcus horum circulorum, quos latera triangulorũ intercipiunt similes, & ideo æquales, φ circuli eorum huius confirmante æquales habeantur, unde etiam eorũ cordas æquari oportet, quæ quidem cordæ arcubus b g & e 3 lateribus scilicet triangulorum ꝓpositorum cõmunes sunt, quare & arcus ipsi æquales erunt. Postremo duorum arcuum a b & a g alter altero maior sit arcus, uerbi gratia, a b maior arcu a g, itemq; d e maior d 3, describãtur itaq; super duobus polis a & d, secundum distantias æquales a g & d 3 circuli g h & 3 k, quos huius æquales arguit. ex portionibus autem æqualibus supra diametros eorũ erectis duo arcus h b & k e absumuntur æquales, quorũ uterq; minor est dimidio arcu portionis suæ. est autẽ arcus g h similis arcui 3 k ex hypothesi & huius, & ideo æqualis eidem, φ circuli sui æquales existant, quare per huius linea b g, si producta fuerit, æquabitur lineæ e 3. unde & arcus b g & e 3, quorum ipsæ sunt cordæ, æquales reperientur. Tres igitur arcus triangulũ a b g claudentes, tribus triangulum d e 3 ambientibus, æquales habentur, angulusq; a unius angulo d alterius æqualis, unde & per præcedentem reliquos angulos unius reliquis duobus angulis alterius æquales uideri necesse est, pro quibus hactenus fatigati sumus.



XXXVII.

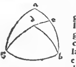
Omnis trianguli duo quælibet latera tertio reliquo sunt longiora.



Duo latera a g & g b trianguli a b g collecta dico esse longiora latere a b. Si enim latus a g æquale fuerit lateri a b, aut longius eo, planum est duo latera a g & g b congregata superare latus a b. Si uero minus eo fuerit secundum distantiam a g, super polo a describatur circulus, cuius arcus g d latus triãguli a b offendat in puncto d. Supra diametrum itaq; circuli g d erecta est portio circuli, ex qua sumptus est arcus d b minor dimidio arcu portionis suæ, quare per huius linea b d recta, si producta fuerit, breuior est linea b g, unde & arcus b d breuior arcu b g. adiectis igitur utrobiq; æqualibus a g & a d arcubus, erit per communem scientiam aggregatum ex duobus arcubus a g, g b maius aggregato ex duobus arcubus a d, d b scilicet arcu a d, quod libuit absoluere. Non aliter de duobus reliquis quibuscunq; ad tertium collatis procedemus.

XXXVIII.

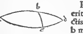
Si à duobus pũctis terminalibus unius lateris trianguli duo arcus exierint, intra angulum ipsum concurrentes, erunt ipsi collecti minores duobus reliquis trianguli lateribus.



A duobus pũctis b & g terminãtibus latus b g triãguli a b g exeant duo arcus b d & g d, intra triangulum confluentes in puncto d. Dico, q; duo arcus b d, d g congregati, minores sunt duobus arcubus a b & a g coniunctis. Protendatur enim arcus g d in e punctum lateris a b, eruntq; per præcedentem duo arcus g a, a e longiores arcu g e. quare adiecto communi e b fient duo arcus g a, a b longiores duobus g e & e b. item duo arcus d e, e b longiores sunt arcu d b, facto igitur d g communi: erunt duo arcus g e, e b longiores duobus g d, d b, sed erãt duo arcus g a, a b longiores duobus g e, e b, multo igitur longiores habebuntur duobus arcubus g d & d b cõiunctis. unde & illi uiceuersa minores istis, q̃d uoluimus pertractare. Cõstat autem ex dictis, q; si ab aliquo puncto terminali lateris trianguli arcus, producatur latus sibi oppositum secans, erunr duo arcus scilicet productus, & ex latere trianguli resectus minores duobus trianguli lateribus.

XXXIX.

Cuiuslibet trianguli sphæralis tria latera duobus semicirculis esse minora.



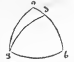
Producantur duo latera a b & a c ut concurrãt in d. erit itaq; b c minor duobus arcubus b d & c d, adiectis itaq; communibus a b & a c, tres arcus a b, a c & b minores erunt duobus semicirculis a b d & a c d.

XL.

Cuiuslibet trianguli duos æquales angulos habentis, duo quoq; lateral eos respicientia æquari necesse est.

Habeas

Habeat nanq; triangulus a b g duos angulos b & g æquales. Dico, q latus a b æquabit lateri a g. Si enim non, alterum altero maius erit, sitq; a g longius ipso a b ex quo abscindam arcum g d æqualem arcui a b producendo arcum b d. Duo itaq; trianguli a b g & b g d bina latera habent æqualia, angulosq; hisce contentos lateribus æquales, angulum uidelicet a b g æqualem angulo b g d ex hypothesi. quare per huius angulus d b g æqualis erit angulo a g b, quem hypothesis subiecit æqualem angulo a b g. unde & angulus d b g angulo eidē a b g æqualis habebit: pars scilicet toti, qđ est impossibile. Nō erit ergo alterū altero maius, & ideo æqualia inuicē relinquent, quod expectabas demonstrandū.



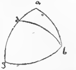
XLI.

Duo latera cuiusuis trianguli æqualia angulos æquales subtendere oportet.

Hæc conuertendo præmissam ex passione eius subiectū inferre suum pollicetur. Triangulus ergo a b g duo latera a b & a g habeat æqualia. Dico q angulus g æqualis erit angulo b. Non enim alter eorū altero maior esse potest. quod si forsitan ita arbitreris, sit angulus g maior angulo b, fiatq; per huius iuxta terminum g arcus b g angulus b g d æqualis angulo a b g, producto arcu g d. Trianguli itaq; d b g duo anguli d b g & d g b æquales sunt, quare per præcedentem duo eius latera d b & d g sibi inuicem æquabuntur. adiectoq; cōi arcu a d erit aggregatū ex duobus arcubus a d. d g æquale arcui a b, qui ponebatur æqualis arcui a g. Vnde & aggregatum ex duobus arcubus a d, d g æquabitur arcui a g, quod est impossibile, repugnans huius. Deceptus igitur affirmabas alterum altero maius esse, quare propositioni nostræ assentire compelleris. Hanc autem & præcedentem ostensiue potuimus demonstrare, uerum breuiores in omni opere uias eligendi fuit consilium.

XLII.

In omni triangulo sphærali maiorem angulū longius subtendit latus.



Angulus enim b trianguli a b g maior occurrat angulo g. Dico q latus a g longius est latere a b. Iuxta punctum enim b arcus b g fiat angulus d b g æqualis angulo a g b. erit igitur per huius arcus d b æqualis arcui d g. adiectoq; arcui a d cōi erit arcus a g æqualis aggregato ex duobus arcubus a d, d b, quod quidē aggregatū per huius maius est latere a b. unde & latus a g latere a b lōgius habebit, qđ placuit addiscere.

XLIII.

Longiori demū lateri trianguli cuiuslibet maiorē opponi angulum.

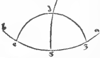


Sit triangulus a b g latus a g longius latere suo a b habens. Dico q angulus a b g maior erit angulo a g b. Nō enim potest esse æqualis ei, sic enim per huius latera a b & a g conuincerentur æqualia, sed neq; minor eo potest haberi, sic enim angulus a g b maior esset angulo a b g, & ideo ex præcedenti latus a b longius

latere a g, quorum cum utrunq; contrarium sit hypothesi, destructis ipsis, relinquitur ueritas theorematis nostri, quam deducere sperabamus.

XLIIII.

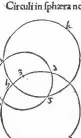
A puncto in arcu circuli magni signato, orthogonalem arcum circuli magni educere.



Sit arcus huiusmodi a b, a cuius puncto g libet educere orthogonalē. Super puncto g tanq; polo secundum distantiam quantamlibet minorem tamen diametro sphæræ describatur circulus e d z, oportet autem arcum e d, e z esse semicircumferentiam, circulus enim magnus a b per polos circuli iam descripti e d z transit, secetur ergo arcus e d z per medium in puncto d, per duoq; puncta d & g arcus circuli magni dirigente huius producatur, qui sit d g, hunc dico esse orthogonalem ad arcum b g, erit enim per huius angulus a g d æqualis angulo b g d. per diffinitionem igitur arcus d g orthogonaliter insidebit arcui a b, quod libuit efficere. Qd' si polus circuli a b datus fuerit, facilius operabimur, ipsum nanq; puncto g copulabimus per arcum circuli magni, qui orthogonalis erit ad arcum a b, circulo illius per polū alterius trāseunte.

XLV.

Circuli in sphæra nobis propositi polum inuenire.



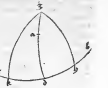
Sit circulus a b g d in sphæra signatus, siue maior siue minor existat, cuius polū reperire libet. Describe circulum, ut libet, secantem circulum a b g d propositum, quod facile uidebit̃, si super aliquo puncto circunferentiæ a b g d secundum quantitatem minorem diametro circuli a b g d circulum circū duxeris, qui sit a g k, utrunq; autem arcuum a b g & a h g per medium scindas, hunc quidē in puncto b, illum uero in puncto h, & per duo puncta b & h circulum magnum b h z d producas huius docente, cuius arcum b h d, quem resecat circulus a b g d propositus per medium partiaris in puncto z, quē oportet esse polum circuli propositi. Nā per partem huius circulus b h z d transit p polos circuli a b g d. oportet autem polum æqualiter distare à punctis b & d in circumferentia circuli a b g d signatis, quod profecto nulli puncto arcus b h d conuenit præter ipsum punctum z, quod facil lime ostenditur, punctus igitur z est polus circuli a b g d quæsitus. Reliquus autem polus inuenietur, si reliquus arcus circuli b h z d per medium diuisus fuerit, nam punctus mediæ diuisionis erit polus ille, cuius demonstrationem ut antehac fabricabimus.

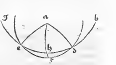
XLVI.

A puncto in superficie sphæræ signato ad arcum circuli magni punctum ipsum non includentis, perpendicularem demittere.

Sit pun

Sit punctus a extra arcũ b g signatus, à quo ad arcum ipsum demittere libet perpendicularem. Per præcedẽtem inueniatur polus circuli, cuius est arcus b g, qui sit z, ducaturq́ per duo puncta z & a circulus magnus, quemadmodũ huius docuit, cuius arcus z d occurrat arcui b g si possibile est, aut ipsi quantum oportet prolongato in puncto d. Dico q arcus z d est perpendicularis ad arcum b g. Circulus enim z a d per polum z circuli b g transiẽs orthogonalis ad eum est ex huius, quod & arcubus ipsorum circulorum accidere necesse est. quicquid enim de inclinatione aut erectione arcuũ ad arcus dicitur, non nisi ex habitudine circulorum suorũ trahitur. Forsitan illud te non satiat, pone igitur arcum h d quantumlibet æqualem arcui d k, duoq́ pũcta h & k puncto z polo scilicet circuli b g connectas per duos arcus circulorũ magnorum qui sint z h & z k, ut docuit huius. duo itaq́ trianguli z d h & z d k terna latera habent æqualia, quare per huius angulus z d h æquabitur angulo z d k, & ideo arcus z d propter quod & a d perpendicularis est ad arcum b g, quod uolebas declarandum. Aliter idem efficies. Super puncto a facto polo describe circulum, cuius circumferentia secet arcũ b g, si possibile est, aut eum prolongatum quoad satis est in duobus punctis d & e, diuidaturq́ arcus d e per medium in puncto h, qui continuetur cum puncto a per arcum circuli magni a h, quem oportet esse perpẽdicularem ad arcum b g. producam enim duos arcus circulorum magnorũ a d & a e. duo igitur trianguli a h d & a h e trina latera habent æqualia, latere a h communi existente, quare per huius angulus a h d æqualis est angulo a h e, & ideo per diffinitionem arcus a h perpendicularis est ad arcum b g, quod libuit attingere.





XLVII.

In triangulis sphæralibus educto latere uno, contingit angulum extrinsecum alteri intrinsecorum sibi oppositorum nunc esse æqualem, nunc uero maiorem, interdum etiam minorem eo.

Duorum enim circulorum ad se inclinatorũ semicircumferentiæ coincidant in punctis a & b, abscindaturq́ ex una earum arcus a g minor quàdrante, à cuius termino g ad arcum a b substratum perpẽdicularis arcus circuli magni descendat g d, eritq́ itaq́ trianguli a g d angulus a d g rectus maior angulo acuto d a g, angulo scilicet inclinationis. est autem angulus a æqualis angulo b, quod constabit per huius descripto circulo secundũ distantiam quantamlibet minore diametro sphæræ super polo a, & ideo angulus a d g extrinsecus ad triãgulum b g d maior est intrinseco angulo b sibi opposito. Rursus cũ sit arcus a g minor quadrante, maior autem arcu a d per huius, erit & arcus a d minor quadrante, & ideo minor



L

minor arcu d g, ex quo abſcindatur ei æqualis arcus d e. productus itaq; arcus g e per huius, æqualis erit arcui a g, quare per huius angulus a e g æqualis erit angulo e a g, illud tamen ſola huius inferre potuit, eſt autem angulus e a g æqualis angulo b. quare angulus extrinſecus a e g æquabitur angulo b intrinſeco ſibi oppoſito. Poſtremo ſignetur punctus quilibet in arcu e, b, qui ſit 3 copulandus g puncto per arcum 3 g, qui profecto ſuperabit arcum e g, & ideo arcum a g ſibi æqualem, per igitur huius angulus 3 a g æqualis angulo b maior erit angulo a 3 g, & uiceuerſa angulus a 3 g extrinſecus ad triangulum b 3 g minor erit angulo b intrinſeco ſibi oppoſito. quæ ꝓpoſuimus lucubrare.

XLVIII.

Si fuerit angulus extrinſecus æqualis alteri intrinſecorum ei oppoſitorum, aggregatum ex lateribus reliquum angulum intrinſecum ei oppoſitũ ambientibus, æquabiť ſemicircumferentiæ. ſi uero maior intrinſeco ſibi oppoſito, erit aggregatũ huiuſmodi minus, & ſi minor, ipſum maius.



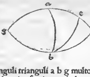
Sit triangulus a b g, cuius latere g b ꝓducto ad partẽ puncti b, fiat angulus extrinſecus æqualis intrinſeco ſibi oppoſito angulo a g b. Dico ꝙ duo latera g a & a b collecta æquabunt ſemicircumferentiã. ſi uero maior fuerit angulo g, ipſa duo latera minora habebuntur ſemicircumferentia, & ſi minor maiora. Protendantur enim duo arcus g a & g b donec concurrent in puncto d. Cum itaq; angulus a b d æqualis fuerit angulo g, erit ipſe etiam æqualis angulo d. quare per huius arcus a b æqualis erit arcui a d, adhibitoq; arcu communi a g, erunt duo arcus b a & a g collecti æquales arcui g d, qui eſt ſemicircumferentia. & hoc erat primum. Quòd ſi angulus a g d maior fuerit angulo g, erit & ipſe maior angulo d. quare per huius arcus a d ſuperabit arcum a b. adiectoq; cõi a g, erunt duo arcus b a & a g cõiuncti minores arcu g d, quem conſtat eſſe ſemicircũferentiam. aperta igitur eſt pars ſecunda. Poſtremo ſi angulus a b d minor exiſtat angulo g, minor quoq; erit angulo d. arcus ergo a b per allegatam maior inuenietur arcu a d. cõiq; ſociato arcu a g erit aggregatum ex duobus arcubus b a, a g maius arcu g d, qui eſt circumferentiæ dimidiũ. Verum itaq; hoc enunciauimus theoremate. Conuerſam autẽ huius medijs utendo conuerſis demonſtrare haud uidebitur difficile.

XLIX.

Omnis triangulus ſphæralis tres habet angulos duobus rectis maiores.

Pleraſq; cõmuniter demonſtrare ſolemus paſſiones de triangulis & planis & ſphæralibus, nonnullas autem differenter. Sphæralibus enim nõ accidit tres angulos ſuos duobus rectis æquales habere, quemadmodum planis. quo fit, ut cognitis duobus angulis trianguli ſphæralis non pendeat inde tertij anguli cognitio. Ne igitur circa hæc quempiã errare contingat, monimento theorematis huius cautiorem reddere libuit. Sit itaq; triangulus a b g ſphæralis. Dico ꝙ tres eius anguli a, b, & g, maiores ſunt duobus rectis. Prolõgatis enim arcubus g a & g b, donec in puncto d concurrent, erit angulus extrinſecus a b d per huius aut æqualis intrinſeco angulo b a g ſibi oppoſito, aut minor eo aut maior. Si æqualis adie-

cto



cto cõmuni angulo a b g, erunt duo anguli a b g & b a g æquales duobus a b d & a b g, quos liquet æquales esse duobus rectis, quare & duo anguli a b g & g a b æquabuntur duobus rectis. & ideo tres anguli a, b, & g, duos superabunt rectos. Si uero angulus a b d minor fuerit angulo b a g, quoniã ipse cũ angulo a b g duobus rectis æquatur, erunt duo anguli a b g & b a g maiores duobus rectis. Tres igitur anguli trianguli a b g multo maiores erunt duobus rectis. Quòd si angulus a b d maior fuerit angulo b a g, fiat iuxta punctũ b arcus a b, angulus a b e æqualis angulo b a g producto arcu b e semicircũferentiæ d a g, occurrẽte in puncto e. Cum itaq; angulus b a g extrinsecus æqualis sit intrinseco angulo a b e trianguli a b e, erũt duo arcus a e & e b coniuncti per præcedentem æquales semicircũferentiæ g a d, ablatoq; cõi arcu a e, manebit arcus b e æqualis duobus arcubus a g & e d. maior itaq; est arcus b e ipso e d arcu. quare per huius angulus b d e maior angulo e b d habebitur. Est autẽ angulus b d e æqualis angulo a g b, quare & angulus a g b maior est angulo d b e. adiectis igitur æqualibus angulis a b g & b a g, item a b g & a b e, erunt tres anguli trianguli propositi maiores tribus angulis a b g, a b e & e b d, quos constat esse duobus rectis æquales. unde tres anguli dicti maiores erunt duobus rectis, quod oportuit demonstrare.

L.

Si fuerint duo latera unius trianguli æqualia duobus lateribus alterius, angulorum autem hisce æqualibus lateribus contentorum altero altero maior, erit quoq; basis maiorem subtendens angulum unius maior basi alterius.



Duo trianguli a b g & e d 3 bina latera habent æqualia, a b quidem æquale d e, & a g æquale ipsi d 3, angulus autem a maior sit angulo d. Dico q basis b g longior est basi e 3. Similem passionem 24. primi Euclidis de triangulis planis concludit. Modus autem demonstrandi hanc & illam non est uarius.

LI.



Si fuerint duo latera unius triangui æqualia duobus lateribus alterius, basis autem unius maior basi alterius, erit & angulus longiorem basim respiciens maior angulo breuiorem respiciente basim.

Hæc conuertit præcedentem, & correspondet 25. primi Euclidis. Quemadmodum autem illa ex 4. & 24. primi Euclidis ad impossibile demõstratur, ita hæc ex huius & præcedenti ad inconueniens ducendo aduersarium, ueritatem probatur habere necessariam.

LII.

Omnium duorum triangulorum binos angulos æquales habentium, duoq; latera æqualibus subiecta angulis æqualia, reliqua quoq;

latera æquos angulos respicientia sunt æqualia, & angulus reliquus angulo reliquo.

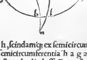


Sint duo trianguli a b g & d e 3, quorum duo anguli b & g æquales sint duobus angulis e & 3, latusq; b g æquale lateri e 3. Dico q latus a b æquabitur lateri e d, & latus a g lateri d 3, similiter angulus a angulo d æqualis habebitur. Si enim non fuerint duo latera a b & d e æqualia, erit alterum altero maius. ex maiori igitur eorum quod sit, uerbi gratia, d e, abscindatur arcus e h æqualis a b producendo arcum 3 h. sequitur itaq; per huius angulum e 3 h æqualem esse angulo a g b, qui ponebatur æqualis angulo d 3 e. angulus igitur e 3 h æqualis erit angulo d 3 e pars toti, quod est impossibile. Non potest igitur alterũ duorum laterum a b & d e altero maius esse, quare & æqualia habebuntur. Similiter probabis duo latera a g & d 3 esse æqualia, angulum postremo a æqualem angulo d conuincet huius, aut quæ decuit stabilire.

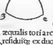


L I I I.

Omnium duorum triangulorum binos angulos habentium æquales, duoq; latera æqualibus opposita angulis æqualia, latera uero reliquos æquales respicientia angulos coniuncta non æqualia semicircũferentiæ, bina latera reliqua erunt æqualia, & angulus reliquus angulo reliquo.



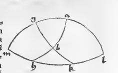
Sint duo anguli b & g trianguli a b g æquales duobus angulis e & 3 trianguli d e 3, latusq; a b æquale lateri d e; duo autem latera a g & d 3 coniuncta semicircumferentiæ non æqualia. Dico q latus a g æquale erit lateri d 3, latusq; b g æquale lateri e 3, & angulus a æqualis angulo d. Producam enim duos arcus g b & g a donec concurrent in puncto h, scindamq; ex semicircumferentia h b g arcum h l æqualem arcui e 3, & ex semicircumferentia h a g arcum h k æqualem arcui d 3, necesse est autem punctum k aliud esse q punctum a, q duo arcus a g & d 3 non æquentur semicircumferentiæ, continuaboq; duos arcus a b & k l donec concurrent in puncto n, erit autem per huius arcus b l æqualis arcui d e, sed & angulus h l k æqualis angulo d e 3, itemq; angulus h k l æqualis angulo e d 3. ponebatur autẽ angulus d e 3 æqualis angulo a b g, quare & angulus h l k æqualis erit angulo a b g, unde & eorũ contrapositi uidelicet n b l & n l b æquales erũt, quare per huius duo arcus b n & n l æquales erũt. cumq; duo arcus a b & k l sint æquales, est enim uterq; eorũ æqualis arcui d e, erit totus arcus a n æqualis toti arcui k n, & ideo per huius angulus n a k æqualis angulo n k a, residuiq; ex duobus rectis anguli scilicet b a g & h k l inuicem æquabuntur. erat autem angulus h k l æqualis angulo e d 3, quare & angulus b a g æquabitur angulo e d 3. duo itaq; trianguli a b g & d e 3 duo latera a b & d e habentes æqualia, binosq; angulos hisce lateribus insidentes æquales, per præmissam itaq; quod reliquum est absoluemus.



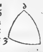
Quicunq;

LIIII.

Quicunq; duo trianguli trinos angulos habent æquales, & trina latera habebunt æqualia.



In eadem sphæra aut diuersis æqualibus tamen sint duo trianguli a b g & d e 3, quorum unius tres anguli tribus angulis alterius singulatim sint æquales. Dico q tria latera unius eorū tribus lateribus alterius æqualia habebunt, latera quidē æquos angulos respicientia ad se cōferendo. Producā enim duos arcus a b & g b ad partē puncti b, ponamq; arcū b h æqualē arcui d e, arcū aūt b k æqualē e 3, & per duo puncta h k ducā arcū circuli magni, quē cōtinuabo utrinq; donec cū arcu a g utrinq; protenso concurrat in duobus punctis l & m. Cum itaq; duo latera triāguli h b k sint æqualia duobus lateribus triāguli d e 3, & anguli hisce cōtenti lateribus æquales, angulus uidelicet h b k æqualis angulo d e 3, erit per huius & basis h k unius basi d 3 alterius æqualis. angulus quoq; b k h æqualis angulo d 3 e, sed & angulus b h k æqualis angulo e d 3. duo autem anguli d & 3 ponebantur æquales duobus a & g. quare angulus b k h extrinsecus ad triangulum g l k æquabitur angulo a g b intrinseco, & ideo per huius aggregatum ex duobus arcubus g l & l k æquabitur semicircumferentiæ. Similiter angulus g a b extrinsecus ad triangulum a l h, intrinseco angulo b h k siue a h l æqualis: duos arcus a l & l h collectos æquari conuincet semicircumferentiæ, demptis ergo communibus arcubus a l & l k, relinquetur arcus a g æqualis arcui h k. Duo itaq; trianguli a b g & b h k duo latera a g & h k habēt æqualia, angulosq; binos ipsis insidentes lateribus æquales, quare per huius triangulus a b g æquilaterus & æquiangulus erit triangulo h b k, qui pridem æquilaterus & æquiangulus demonstrabatur triangulo d e 3, unde & duo trianguli a b g & d e 3 trina latera habebunt æqualia, quod erat absoluendum. Ne autem suspiceris arcum a g utrinq; protensum occurrere arcui h k in punctis h & k: sic enim cassaretur forma argumentationis nostræ, ostendemus id fieri non posse. Nam si ita accideret, fieret arcus h g a k semicircumferentia per huius, q duæ circumferentiæ circulorum magnorum se secarent in duobus punctis h & k, similiter oportet arcum g a k esse semicircūferentiam. cūq; omnes semicircūferentiæ unius circuli sint æquales, fieret pars æqualis toti, quod est impossibile. Idem sequeret si arcus a g continuatus alteri duntaxat duorum punctorum h & k occurreret, oportet igitur duo puncta l & m esse diuersa â punctis k & h.



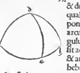
LV.

Omnes duos triangulos, quorum duo latera unius sunt æqualia duobus lateribus alterius, duoq; anguli eorum duobus æquis lateribus oppositi æquales, reliqui uero duo anguli eorum reliquis duobus æquis lateribus oppositi, aut ambo acuti, aut ambo obtusi, æquilateros & æquiangulos esse necesse est.

Duo latera a b & a g trianguli a b g æqualia sint duobus lateribus d e & d 3 trian-



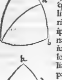
d 3 trianguli d e 3, dextrum uidelicet dextro & sinistrum sinistro, angulusq; g æqualis angulo 3, uterq; autem angulorum reliquorum b scilicet & e, aut acutus, aut uterq; obtusus. Dico ꝙ angulus a æqualis erit angulo d, angulus etiam b æqualis angulo e, & latus a b æquale lateri d e. Sit enim primo uterq; angulorũ b & e acutus, si itaq; latus b g æquale fuerit lateri e 3, per huius concludemus intentum, si uero alterum altero maius fuerit, sit uerbi gratia b g longius e 3, protendaturq; arcus 3 e in h, ut 3 h arcus æqualis fiat b g & ducatur arcus d h. erit igitur per huius arcus d h æqualis arcui a b, & angulus d h 3 æqualis angulo a b g. ponebatur autem arcus a b æqualis arcui d e, quare duo arcus d h & d e sibi æquabuntur, & ideo per huius angulus d h e æqualis angulo d e h. cumq; angulus d h e sit acutus propter angulum a b g ei æqualem acutũ, erit & angulus d e h acutus, unde angulus d e 3 obtusus habebitur, quod est contrariũ posito. Nõ aliter procedemus,



si aduersarius arcum e 3 maiorem arbitretur arcu b g. Qđ si posuerimus utrũq; angulorũ b & e obtusum, concludemus simili argumentatione angulũ e esse acutum. Volenti igitur contradicere propositioni nostræ, concluditur eundem angulum esse acutum & obtusum, quod cum esse nequeat, manifesta relinquetur ueritas theorematis.

LVI.

Omnes trianguli rectanguli bina latera habentes æqualia, utraq; autem latera rectos angulos ambientia minora quadrante diuisim, æquianguli & æquilateri comprobantur.



Sint duo trianguli a b g & d e 3, quorũ angli b & e sunt recti, utrunq; autem laterũ a b & b g trianguli a b g minus quadrante, similiter utrunq; d e & e 3 minus quadrante, duoq; latera unius duobus reliqui lateribus quibuscũq; sint æqualia. Dico ꝙ reliquũ latus unius æquale erit reliquo lateri alterius, & anguli reliqui unius angulis reliquis alterius; hoc est, ipsi duo trianguli æquilateri erunt & æquianguli. Si enim bina eorũ latera æqualia circa rectos fuerint angulos, per huius constabũt omnia. Si aũt latera huiusmodi æqualia angulos ambiant alios, sint uerbi gratia duo latera b a, a g æqualia duobus e d, d 3, dextrũ dextro & sinistrum sinistro comparando, producaturq; uterq; arcuum b a & e d, donec fiat quadrans, b a quidem ad h, & e d ad k, erunt itaq; puncta h & k poli circulorum b g & e 3, à quibus demittantur duo quadrantes h g & k 3, quos æquales cõstat, cum in una sphæra aut duabus æqualibus eos imaginari soleamus. est autẽ & arcus a h æqualis arcui d k. hi enĩ duo sunt complementa duorũ arcuũ a b & d e, q̃s æquales tradidit hypothesis.

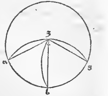


per igitur huius duobus arcubus a g & d 3 æqualibus existentibus, erit angulus h a g æqualis angulo k d 3, unde & residui ex duobus rectis anguli scilicet b a g & e d 3 nõ erũt inæquales, ponebantur aũt & duo arcus b a, a g æquales duobus e d, d 3. quare per huius triangulos propositos æquiangulos conuincet & æquilateros, quæ fuere lucubranda. Finis tertij triangulorũ.

LIBER QVARTVS TRIANGVLORVM.

I.

Si à polo circuli magni in sphæra ad circumferentiam ipsius, aut ar cum eius arcum magnum demiseris, arcus ille demissus erit quadrans perpendicularis circumferentiæ, duos angulos supra arcum, cui incidit, rectos secernens.



Sit circulus magnus in sphæra a b g, à cuius polo 3 demittatur arcus circuli magni qui sit 3 b. Dico ꝙ arcus 3 b erit quadrans circumferentiæ magnæ, & uterq; angulorum a b 3 & 3 b g rectus erit. Producam enim lineam polarem circuli a b g, quæ sit 3 b, quam per tertij huius oportet esse latus quadrati inscripti circulo magno. quatuor autem latera quadrati huiusmodi, cũ sint æqualia, quatuor abscindunt æquales arcus per tertij, ex circũferentia circuli, quorũ unus est arcus 3 b, arcus igitur 3 b est quadrans circuli. Præterea circulus, cuius est arcus 3 b, transit per polũ 3 circuli a b g, quare erectus est ad eum per tertij huius, quod non potest esse, nisi uterq; angulorũ a b 3 & 3 b g sit rectus. Sed fortasse infirmam suspicaris hãc argumentationem, describe igitur super polo b secundũ quantitatem b 3 circulũ in sphæra, cuius semicircumferentia sit a 3 g arcus, erit itaq; ex eis, quæ super hoc theoremate præsenti primũ diximus, uterq; arcuũ a 3 & 3 g quadrans circũferentiæ, quare per tertij huius duo anguli a b 3 & 3 b g æquales declarantur, per diffinitionem igitur arcus 3 b est perpendicularis ad circumferentiam circuli a b g, quæ fuerunt explananda.

II.

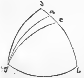
Si ab aliquo puncto arcus circuli magni quadrans magnus orthogonaliter egrediatur, terminus eius erit polus circuli à quo egrediebatur quadrans ipse, cum quo declarabitur punctum concursus duorum arcuum orthogonaliter à tertio arcu exurgentium, esse polum circuli arcum ipsum continentis.

A puncto b arcus a b g circuli magni orthogonaliter egrediatur quadrans circuli magni b 3. Dico ꝙ punctus 3 terminus uidelicet quadrantis egressi erit polus circuli a b g. Subtensa enim quadranti dicto corda sua b 3, quam constat esse costam quadrati magni, secundũ eius quantitatem describat circulus magnus, cuius semicircumferentia sit a 3 g, cumq; duo anguli a b 3 & 3 b g sint æquales hypothesi id exigente, erunt per tertij huius duo arcus a 3 & 3 g similes, unde & æquales, ꝙ de eadem circumferentia existant, est autem arcus a 3 g semicircumfe

rentia circuli magni, quemadmodũ trahitur ex tertij huius, quare uterq; arcuũ a 3 & 3 g est medietas semicircumferentiæ, & ideo quadrans circũferentiæ totius circuli magni. tres igitur arcus a 3, b 3 & g 3 æquales sunt quadrantes circumferentiaræ magnarũ æqualium, quare per tertij cordæ eorũ æquales declarantur. à puncto itaq; 3 ad circumferentiam circuli a b g tribus æqualibus rectis descendentibus tertij huius punctũ 3 polum circuli a b g declamabit, quod uolebamus aperire. Corollariũ autem sic constabit. In utroq; arcuũ orthogonaliũ, quantum sat est protensorũ, necesse est inueniri polũ circuli huiusmodi, quemadmodum ex præsenti trahitur, aut igitur punctus coincidentiæ duorũ arcuũ orthogonaliũ est polus, aut duo erunt poli unius circuli ex eadem parte, sed nullus circulus duos ex eadem parte polos habet per tertij. punctus igitur in quo confluũt dicti arcus orthogonales, polus circuli, à cuius arcu egrediunt̃ ipsi habebitur.

III.

In omni triangulo rectangulo latera rectum angulum continentia ad quadrantem circũferentiæ & anguli eis oppositi ad rectum angulum similes habebunt comparationes.



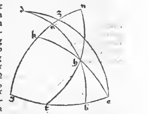
Volo dicere. Si angulus, qui uni ex lateribus rectum angulũ continentibus, opponitur recto, fuerit æqualis, latus ipsum quadranti æquale erit. si maior recto, & ipsum latus quadrante maius. si minor, ipsum minus quarta circũferentiæ. Versa demũ uice. Si alterum ex huiusmodi lateribus rectum ambientibus quadrãs existat, angulus ei oppositus erit rectus. si maius quadrante, maior recto erit angulus. & si minus, minor. Sit igitur exempli causa triangulus sphæralis a b g, ex arcubus circulorũ magnorũ constitutus, angulũ b rectum habens. Dico q; si angulus g rectus fuerit latus, a b erit quadrãs. si uero recto maior, arcus a b quadrantem superabit, & si minor recto extiterit, arcus a b quadrante minor habebitur. Similiter si arcus a b quadranti æqualis occurrat, angulus g rectus erit. si uero quadrante maius, & angulus g rectũ superabit. & si minus quadrante, angulũ g recto minorem enunciabimus, quæ sic habebis. Sit primo angulus g rectus, uterq; igitur circulorũ, in quibus sunt duo arcus a g & a b, erectus est ad superficiem circuli, cuius est latus tertium b g, transibitq; per polum circuli b g. cũ autem hij duo arcus in puncto a coincidant, erit a polus circuli b g magni, quare per corollarium tertij huius arcus a b respiciens angulũ g, erit quadrans circumferentiæ. Sit deinde angulus a g b maior recto, & fiat iuxta punctũ g arcus b g angulus rectus b g e, docente tertij huius, ꝓducendo arcũ g e. erit itaq; e polus circuli b g, & ideo arcus e b quarta circuli, quare arcus a b angulũ a g b subtendens quadrantem superabit. Qđ si angulus a g b minor fuerit recto, statuatur angulus d b g rectus, eritq;, quemadmodũ antea conclusum est, d polus circuli b g, & arcus d b quadrans circũferentiæ, quare arcus a b angulũ a g b subtendens minor quadrante. Præterea ponamus arcũ a b quartam circumferentiæ, eritq; propter hoc a polus circuli b g, & ideo arcus a g erectus ad arcũ b g, angulus ergo a g b rectus habebitur. Sed intelligatur arcus a b maior quadrante, fiatq; arcus e b quarta circuli, & ideo e polus circuli b g, arcus itaq; e g erectus erit ad arcum b g, & angulus e g b rectus, quare angulus a g b maior

recto

recto. Qd' si statuerimus arcũ a b minorem quadrante, prolongetur ipse in directum usq; ad d, donec b d fiat quarta circuli, ideoq; d polus circuli b g. demisso igitur arcu d g, erit angulus d g b rectus, & angulus a g b minor recto. manifestam itaq; effecimus theorematis nostri ueritatem.

IIII.

In omni triangulo rectangulo, si fuerit alterum ex lateribus rectum ambientibus quarta circuli, latus quoq; rectum subtendens angulum erit quarta circuli. si uero fuerint latera rectum angulum continentia, aut ambo maiora quadrante, aut ambo minora, erit latus rectũ subtendens angulum minus quarta circuli. ꝙ si alterum maius quadrante, & alterum minus extiterit, latus rectum angulum respiciens, maius quadrante pronunciabitur.



Habeat triangulus a b g angulũ b rectum, & latus a b quadrantem circumferentiæ. Dico ꝙ latus a g rectum subtendẽs angulum, erit quarta circuli. Erit enim a polus circuli b g, quare per huius arcus a g erit quarta circuli. Si uero uterq; arcuũ a b & b g minor quarta fuerit, erit arcus a g minor quadrante. fiat enim arcus g e quarta circuli & arcus b d similiter, transeatq; p duo puncta d & e arcus circuli magni d e, arcus autem g a prolongetur, donec occurret arcui d e in puncto z. Quoniã itaq; anguli apud b sunt recti, & arcus b d quarta circuli erit d polus circuli g e, & ideo angulus e rectus, sed & e g est quarta circuli. quare punctus g est polus circuli d e, & ideo arcus g z est quadrans circumferentiæ, arcus igitur partialis a g minor quadrante fiet. Sit deinceps uterq; arcuũ a b, b g maior quadrante. Dico ꝙ arcus a g erit minor quarta circumferentiæ. Abscindam enim utrunq; arcuũ g t & b h quadrantem, per duoq; puncta t & h producam arcum circuli magni occurrentem arcui g a continuato in n, quoniam itaq; angulus b est rectus, & arcus b h quarta circuli, erit h polus circuli b g, & angulus apud t rectus. cumq; arcus t g sit quarta, erit g polus circuli t n, quare arcus g n est quarta, & ideo arcus a g minor quadrante. Postremo sit arcus a b maior quarta, & arcus b g minor. Dico ꝙ arcus a g maior erit quadrante. Fiat enim uterq; arcuũ g e & b h quarta circuli, prolongando quidem arcum g b usq; ad e, arcũ autem b h resecando ex arcu a b, incedatq; arcus circuli magni per duo puncta h & e, occursurus arcui a g in puncto k. Cum igitur arcus b h est quarta, & angulus b rectus, erit h polus circuli g b e, quare & angulus apud e rectus. est autẽ & arcus e g quadrãs. g igitur est polus circuli e k, quare arcus g k erit quarta circuli, unde & a g arcus quadrantem superare dinoscitur, quæ fuere concludenda.

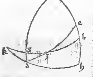
V.

In omni triangulo rectangulo si fuerit latus rectum subtendens angulum quarta circuli, erit alterum ex duobus rectũ ambientibus quarta cir

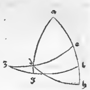
ta circuli. Si uero fuerit minus quadrante, erit utrunq; reliquorũ aut maius quadrante, aut minus eo. q si ipsum fuerit maius quadrante, erit alterum ex duobus rectum ambientibus quadrante maius, reliquum autem minus eo.



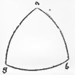
Hæc est conuersa præcedentis. Sit itaq; in triangulo a b g angulum b rectum habente, latus a g quadrans circumferentiæ. Dico q alter duorũ laterum a b, b g erit quarta circuli. Super puncto enĩ a facto polo, secundũ quantitatem a g describat circulus, quem oportebit esse magnũ, q arcus a g sit quarta circumferentiæ magnæ. si igitur circumferentia eius transibit per punctũ b, planum est arcum a b esse quadrantem. si uero prætereat ipsum, aut ibit supra aut infra ipsum. si supra, secabit arcũ a b in puncto qui sit d, per itaq; huius duo arcus a d & d g orthogonaliter sibi inuicem insistent, est autem & arcus g b orthogonalis ad arcum a b propter angulũ b rectum ex hypothesi, quare per huius g est polus circuli a b, & ideo per huius arcus g b, latus uidelicet trianguli propositi erit quarta circumferentiæ. Similem pristinis concludes medijs, si circũferentia circuli super a polo descripti, transibit infra punctum b, occurrens arcui a b prolongato in puncto e. Sit demum arcus a g minor quadrante. Dico q uterq; arcum a b, b g aut erit maior quarta, aut minor ea. Crescat enim arcus a g in directum, donec habeat arcus a d quadrans, secundũ cuius cordam circumducatur circulus magnus, qui nequaq; offendet punctũ b, alias enim per huius & hypothesim sequeretur rectum angulũ esse minorem recto. Aut igitur secando arcum a b: si opus fuerit: prolongatum transibit supra b punctũ aut infra. Transeat prius supra, secãs necessario arcum b g in puncto qui sit 3. erit itaq; per huius angulus 3 e b rectus. cũq; sit etiam angulus e b 3 rectus ex hypothesi, erit per corollariũ



2. huius 3 polus circuli a b, & ideo per primam huius arcus 3 b quarta circumferentiæ. latus igitur b g quadrantem superabit, latus deniq; a b quadrantẽ excedere nemini dubium erit: consideranti saltem arcum a e æqualem arcui a d esse quartam circumferentiæ. Sed transeat circulus dictus infra punctũ b, secando arcum a b protensum oportune in puncto h, arcum autem b g prolongatũ in puncto k, erit itaq; per media nunc commemorata, ne iusto crebrius primam atq; secundam huius repetam propositiones, angulus apud h rectus, sed & angulus apud b rectus ex hypothesi, quare punctus k erit polus circuli a b, ideoq; arcus k b quadrans, & latus g b trianguli nostri quadrante minus, latus autem a b quadrante breuius esse nemo dubitabit. Tandem arcus a g rectũ subtendens angulũ quartam superare ponatur. Dico q alter duorũ laterum a b, b g maius erit quadrante, reliquũ uero minus. Resecto enim quadrante a d, cordam ipsius sup a polo circumferentes creabimus circulum magnũ, cuius profecto circumferentia punctum b præteribit, alias enim monstrum nasceretur mathematicũ, imò uerius impossibile



possibile, rectus scilicet angulus recto maior. Transeat itaq; prius supra punctũ b, secando arcum a b in puncto e, arcum uero b g oportune extensum in puncto 3, quem constabit esse polum circuli a b angulis apud b & e rectis existentibus, unde & arcus 3 b circumferentiæ quarta pars habebitur. latus igitur b g trianguli a b g quadrante breuius relinquitur, latus autem reliquũ a b quadrantẽ superabit proculdubio. Qđ si circumferentia dicta descenderit infra punctũ b, secando arcum a b satis porrectũ in puncto h, arcum autem b g (nam ita fieri necesse est) in puncto k, pristino freti syllogismo, declarabimus k esse polum circuli a b, & arcum b k quadrantem circumferentiæ, unde consequitur latus b g trianguli nostri quadrante longius esse, reliquũ uero latus a b quadrantis a h longitudinem haud attingit. Tres igitur theorematis partes confirmauimus, quod libuit efficere. Possumus præterea propositionem nostram stabilire, aduersario oppositũ asserenti concludentes impossibile per huius. Nam ponendo latus a g quadrantem si dixerit neutrũ reliquorum laterum esse quadrantẽ, erit necessario utrunq; eorum aut maius uel minus quadrante, aut alterũ maius & reliquũ minus. quocunq; autem illorum existente, sequitur per huius arcum a g non esse quadrantem, sic idem arcus quadrans & non quadrãs aduersario proteruienti habebitur, quod est impossibile. Si uero latus a g fuerit minus quadrante, & non fuerit utrunq; reliquorum laterum aut maius quadrante, aut minus sententia quidem aduersarij, erit necessario alterum eorum quadrans, aut alterum eorum maius quadrante, & reliquũ minus eo, quo ita existente, sequitur per huius arcum a g esse quadrantem aut maiorem eo, qui pridem ponebatur minor eo. Qđ si latus a g maius supponatur quadrante, & credat aduersarius, alterum duorũ laterum a b & b g esse quadrantem, aut utrunq; eorum maius uel minus quadrante, concludemus ei per huius arcum a g aut esse quadrantẽ, aut quadrante breuiorem, quem nuperrime concessit esse maiorẽ quadrante. Destructis igitur impossibilibus, ad quæ duximus aduersarium, theorematis nostri fundabitur ueritas.



VI.

In omni triangulo rectangulo, si alter duorum angulorum, quos sustinet latus, rectum respiciens angulum, rectus fuerit, erit latus ipsum quarta circuli. si uterq; eorum aut obtusus aut acutus extiterit, latus dictum quadrante breuius erit. si uero alter eorum obtusus, reliquus autẽ acutus occurrat, latus ipsum quadrante maius conijcietur.

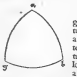
Triangulus a b g angulum g rectum habeat. Dico q si alter duorũ angulorum a & g rectus fuerit, latus a g erit quarta circumferentiæ. si uero uterq; eorum aut obtusus aut acutus extiterit, latus a g quadrante breuius habebit. & si angulus a fuerit obtusus, angulus aũt g acutus uel econtra, arcus a g quadrantem superabit, Si enim alter angulorum a & g rectus fuerit, erit per huius alterum duorum la-



rum laterum a b & b g quarta circuli, quare per huius arcus a g erit quarta circuli. Si uero uterque angulorum a & g aut obtusum aut acutũ sese præbeat, erit per allegatã huius utrunque duorum laterum a b & b g aut maius quadrante, aut minus eo, unde per huius latus a g quadrante breuius arguetur. Qđ si alter angulorũ a & g obtusus, reliquus autem acutus extiterit, erit ex huius alter duorum arcuũ a b & b g maior quadrante, reliquus autem minor eo, quare per huius latus a g quadrantem superabit, quæ censuimus explananda.

VII.

Si latus rectum angulum trianguli sphæralis respiciens quadrans circumferentiæ fuerit, alter angulorum sibi insidentium rectus indicabitur. si uero quadrante minus extiterit, erit uterque dictorum angulorum aut obtusus aut acutus. & si latus ipsum quadrante longius offeratur, alter dictorũ angulorũ obtusus, reliquus aũt acutus prædicabitur.



Hæc est cõuersa prioris. Sit triangulus a b g rectangulus, angulũ uidelicet b rectum habens. Dico quod si latus a g fuerit quadrans circumferentiæ, alter angulorũ a & g rectus erit. si uero arcus a g minor fuerit quadrãte, uterque angulorum a & g aut obtusus erit, aut uterque acutus. & si arcus a g quadrantem excedat, erit alter angulorum a & g obtusus, reliquus autem acutus. Nam arcu a g quadrante existente, erit alter duorum arcuũ a b & b g quarta circumferentiæ per huius, quare per huius alter angulorum a & g rectus concludetur. Si uero arcus a g quadrante minor extiterit, erit per eandem huius uterque arcuũ a b & b g aut maior quadrante, aut minor eo, quare per huius uterque angulorũ a & g aut obtusus erit, aut acutus. Qđ si arcus a g quartæ circumferentiæ maior occurrat, erit alter duorũ arcuum a b & b g maior quadrante, & reliquus minor eo, quare per huius alter angulorum a & g obtusus erit, & reliquus acutus, quæ fuere declaranda.

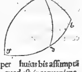
VIII.

Si quis triangulus sphæralis duos acutos habeat angulos, aut duos obtusos, arcus egrediens à uertice tertij anguli, lateri se respicienti perpendiculariter occursurus, intra triangulũ reperietur. si uero alter eorũ acutus, & reliquus obtusus extiterit, extra triangulũ necessario cadet.



Sit triangulus huiusmodi a b g, duos angulos b & g habens acutos, aut ambos obtusos. Dico quod arcus ab a puncto lateri b g: quantumuis utrinque indefinito, perpendiculariter occursurus, intra triangulũ a b g consistet. Non enim poterit egredi triangulũ ipsum, quod si possibile arbitreris, sit arcus ille a d coincidens arcui g b, quantũ sat est porrecto dextrorsum in puncto d, erit itaque arcus a d latus commune duobus triangulis a d b & a d g rectangulis

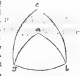
rectangulis. si igitur duo anguli b & g triãguli a b g fuerint acuti, erit angulus a b d obtusus, quare per huius arcus a d minor erit quadrante propter angulum a g d trianguli a g d acutum, & per eandem maior quadrante propter angulum a b d trianguli a b d obtusum. idem itaq; arcus minor erit quadrãte circumferentiæ eiusdem, & maior eo, quod est impossibile, arcus ergo perpendicularis huiusmodi non cadet extra triangulũ. Prohibet autem hypothesis, ne arcus ille transeat per alterũ punctorũ b & g, sic enim angulus acutus aut obtusus haberet rectus, quod est impossibile. Destructis autem incõuenientibus illis relinquitur q non nisi intra triangulũ permaneat, quod pollicebatur prima pars theorematis. Sit demũ alter prædictorũ angulorũ, uerbi gratia, b obtusus, & reliquus g acutus. Dico q perpendicularis cadet extra triangulũ. Non enim potest coincidere alteri duorũ laterũ a b & a g, sic enim angulus obtusus aut acutus esset rectus, sed neq; intra triangulum consistere poterit. Si enim ita putaueris, sit arcus a e perpendicularis ad arcum b g, cui secundum punctũ e communicat. erit itaq; latus a e commune duobus triangulis a b e & a g e rectangulis, quorũ unus angulũ a b e habet obtusum, reliquus autem angulũ a g e acutũ, quare per huius bis assumptã arcus a e maior erit quarta circumferentiæ, & minor ea, quod est inconueniens. Cum igitur arcus perpendicularis huiusmodi non possit coincidere alteri duorum laterũ a b & a g, neq; intra triangulũ cadere, reliquũ est necessario ut extra triangulum reperiatur, quæ cupiebas addiscere.



IX.

Cuiuslibet trianguli tres angulos acutos habentis, trium laterum unumquodq; minus quadrante pronunciabitur.

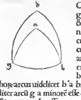
Trianguli a b g tres anguli sint acuti. Dico q unũquodq; latus eius quadrante minus erit. Fiant enim apud duo puncta b & g duo anguli recti, eductis duobus arcubus circulorũ magnorũ b e & g e in puncto e cõcurrentibus, quem per huius oportet esse polum circuli b g. à polo igitur e per punctũ a procedat circulus magnus, qui necessario secabit arcum b g, si enim non secaret, necessario alterũ duorũ arcuũ a b & a g, fieret'q; pars quadrantis semicircumferentia, quod est inconueniens, secet igitur in puncto d, erit autem uterq; angulorũ apud d rectus per huius, & ideo uterq; triangulorũ a b d & a g d rectangulus. cumq; duo anguli a b d & b a d sint acuti, totum enim b a g acutum tradidit hypothesis, erit per huius arcus a b minor quadrante. similiter probabimus arcũ a g minorem quadrante, restat igitur, ut arcum b g quadrante breuiorem ostendamus, quod quidem habebitur, si apud duo puncta a & b duos rectos, quemadmodũ nuperrime apud duo puncta b & g constituerimus. & hoc erat peragendum.



X.

Si quis triangulus duos acutos habeat angulos æquales, utrunq; laterum eos respicientiũ minus quadrante prædicabitur.

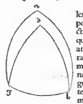
Sit triangulus a b g, duos angulos b & g acutos habens æquales. Dico q



utrunq; laterũ eius, a b & a g minus erit quarta circuli. Creabimus enim apud duo pũcta b & g duos rectos angulos; arcui b g insessuros eductis duobus arcubus b d & g d in puncto d confluentibus, quem huius non sinit esse polum circuli b g, & ideo per huius uterq; arcuum b d & g d quadrans habebitur. Cũ itaq; duo arcus b a & g a, ex punctis terminalibus lateris b g trianguli d b g egressi intra triangulum d b g concurrãt, erunt per tertij huius duo arcus b a & a g coniuncti breuiores duobus arcubus b d & d g. Vnde & medietas horũ arcus uidelicet b a breuior erit medietate istorũ, quadrante scilicet b d. similiter arcũ g a minorẽ esse cõstabit ipso quadrãte g d. oportet enĩ duos arcus b a & a g æquales esse, tertij huius enunciante, quod libuit attingere.

XI.

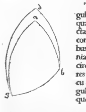
Trianguli duos obtusos habentis angulos æquales utrunq; laterũ eos respicientiũ, maius quadrante reperietur.



Sint duo anguli b & g, trianguli a b g obtusi æquales. Dico q utrunq; laterum a b & a g quadrantem superabit. Factis enĩ duobus rectis angulis apud duo puncta b & g, arcus b g, educendo duos arcus b d & g d, quos constat intra triangulum a b g concurrere, quod fiat in puncto d, erunt quẽadmodum in præmissa argumẽtabar duo arcus b d & b g, quos oportet esse quadrãtes, minores duobus arcubus b a & a g lateribus trianguli nostri: & ideo sicut duo arcus b a, a g æquales, ꝑpter angulos a b g & a g b æquales, superabũt duos quadrantes b d & d g, ita uterq; arcuum b a & a g quadrante maior intelligetur, quod uoluimus exponere.

XII.

Si quis triangulus inæquales habeat duos angulos acutos, latus minori eorum oppositum minus erit quadrante.



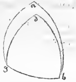
Triãguli a b g duo anguli b & g sint acuti, sitq; angulus g minor angulo b. Dico q latus a b est minus quadrante. Nã constituendo duos rectos apud duo puncta b & g, productis arcubus b d & g d in puncto d concurrentibus, erũt duo arcus b a & a g minores duobus b d & d g, qui semicircũferentiam perficiunt, quoniam uterq; eorum est quadrans circumferentiæ, d polo circuli b g existente. duo igitur arcus b a & a g minores sunt semicircumferentia. cũq; arcus b a minor sit arcu a g per tertij huius, q angulus g minor existat angulo b, erit arcus b a minor quadrante circumferentiæ, quod erat demonstrandum.

XIII.

Trianguli duos obtusos habentis angulos inæquales, latus maiori eorũ oppositũ maius quadrante pronunciabitur.

Habeat

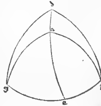
Habeat triangulus a b g duos angulos b & g obtusos inæquales, g scilicet maiorem angulo b. Dico φ latus a b maius est quadrante. A punctis enim b & g arcus erecti orthogonaliter concurrent intra triangulũ a b g, qđ sit in puncto d polo scilicet circuli b g, erunt φ duo arcus b a & a g maiores duobus arcubus b d, d g, qui æquantur semicircumferentiæ, quare duo arcus b a, a g semicircumferentiam superabunt, unde & maior eorum scilicet arcus a b quadrante maior habebitur, quod erat absoluendum.



XIIII.

Si quis triangulus duos acutos habuerit angulos, latusφ uni eorũ oppositum non minus quadrante, erit reliquus eius angulus obtusus, latusφ ei oppositum maius quadrante.

Sit triangulus a b g duos angulos b & g acutos habens, cuius latus a b alterũ acutorũ respiciens, non sit minus quadrãte. Dico φ angulus eius a erit obtusus, & latus b g maius quadrãte. Fiãt eñ apud duo puncta b & g duo anguli recti, eductis duobus arcubus in puncto d extra triangulũ a b g concurrentibus, quem quidem oportet esse polum circuli b g, demittaturφ à polo d puncti a quadrans d a e, incidens arcui b g in puncto e. Cum igitur arcus a g non sit minor quadrante, erit ipse aut quadrans, aut maior eo. Si quadrans, per huius alterum duorũ laterũ a e, e b trianguli rectanguli a e b erit quarta circumferentiæ. et autem arcus a e minor quadrante, reliquus ergo e b quadrans erit necessario, quare totus arcus b g maior erit quadrãte. Similiter per huius probabimus angulũ b a e esse rectũ, cum angulus a b e sit acutus ex hypothesi, totus igitur angulus b a g maior est recto. Qđ si latus a b maius fuerit quadrante, erit per huius arcus b e maior quadrante, cum reliquus a e sit minor quadrante, arcus ergo b g multo maior erit quadrãte. Similiter per huius oportebit angulũ b a e esse obtusum, cum angulus a b e sit acutus per hypothesim, angulus ergo b a g multo magis erit obtusus, patet igitur propositio.



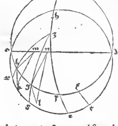
XV.

Si fuerint in sphæra duo circuli magni ad se inclinati, signenturφ in circumferentia unius eorum duo puncta, aut in utriusφ circumferentia punctus unus, & producatur ex unoquoφ punctorum ad circũferentiam circuli alterius perpendicularis arcus, proportio sinus arcus qui est inter unum illorum punctorum, & punctum sectionis circulorum ad sinum arcus perpendicularis ex eo protracti ad circulum alterum est, ut proportio sinus arcus comprehensi inter punctum alium

 & punctũ

& punctum sectionis ad sinum arcus producti ex illo puncto.

Non absterreat obsecro te uerbosa præsens propositio, & primo aspectu intricata; rebus enim Mathematicis uix satis lucidum, ne dixerim uenustũ, accomodabis sermonem; fructũ profecto dulcissimũ hac arbore quis rigida decerpes, quem ubi persenseris, totũ fermè præsentẽ librum intelliges. Sint igit̃ duo circuli magni in sphæra ad se inuicem inclinati a b g d & a e d, quorũ circumferentiæ secent se in punctis a & d, signent̃q; duo puncta b g in circumferentia circuli a b g d, à quibus descendant duo arcus ꝑpendiculares b r, g s ad circumferentiam circuli a e d. Dico ꝙ proportio sinus arcus a b ad sinum arcus b r est ut sinus arcus a g ad sinum arcus g s. A punctis enim b & g binæ perpendiculares rectæ demittãtur, unæ quidem ad sectiõem communem circulorũ scilicet lineam a d, quæ sint b m, g n, alteræ uero ad superficiem circuli a e d, quæ sint b k & g l ductis lineis k m & l n

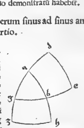


quoniam itaq; duæ lineæ m b, b k angulariter coniunctæ, æquedistant duabus n g, g l angulariter coniunctis, b m enim æquedistat lineæ g n per primi, b k autem ipsi g l per undecimi, erit angulus m b k æqualis angulo n g l, uterq; autem angulorũ b k m & g l n rectus est ex diffinitione lineæ perpendicularis ad superficiem, quare per 32 primi duo trianguli m b k & n g l sunt æquianguli, & ideo per 4. sexti permutatim arguendo proportio m b ad b k est, ut proportio n g ad g l. est autem m b sinus rectus arcus a b per tertij & diffinitionem, n g uero sinus arcus a g, item b k sinus arcus b r, g l autem sinus arcus g s. proportio igitur sinus arcus a b ad sinum arcus b r est ut sinus arcus a g ad sinum arcus g s. Habemus ergo partem propositionis ueram, quando duo puncta in una circũferentia signantur, Signemus ea demum in duabus circumferentijs dictorũ circulorũ, sitq; unus b in circumferentia circuli a b g d, reliquus autem t in circumferentia circuli a e d, descendat à puncto t perpendicularis arcus t x ad circumferentiam circuli a b g d. Dico ꝙ proportio sinus arcus a b ad sinum arcus b r est, ut proportio sinus arcus d t ad sinũ arcus t x. Sint enim poli duorũ circulorũ h & 3, per quos transeat circulus magnus h 3 p e secans circumferentias dictorũ circulorũ in pũctis p & e. In circumferentia itaq; circuli a b g d signata sunt duo puncta b & p, à quibus descendunt duo ꝑpendiculares b r & p e, quare ꝓportio sinus arcus a b ad sinum arcus b r est ut sinus arcus a p ad sinum arcus p e. Rursus cum in circumferentia circuli a e d signata sint duo puncta e & t, à quibus duo perpendiculares oriuntur e p & t x, erit proportio sinus arcus d t ad sinum arcus t x, sicut sinus arcus d e ad sinum arcus e p. est autem proportio sinus arcus d e ad sinum arcus e p, sicut sinus arcus a p ad sinum eiusdem arcus p e, uterq; enim arcuũ a p & d e est quarta circumferentiæ unius. proportio igitur sinus arcus a b ad sinum arcus b r est ut sinus arcus d e ad sinũ arcus t x, quæ fuere peragenda. Sed forsitan adhuc animus pendet, attento ꝙ à quolibet puncto in superficie sphærica præ-

trica præter polum circuli cuiuslibet, extra tamen circumferentiam eius signato,
geminos demittere liceat arcus perpendiculares ad circumferentiam ipsius circu
li. possibile est enim per punctum signatũ & polum circuli transire circulũ alium
magnum tertij huius docente. circuli igitur hoc pacto descripti, duo arcus inter
punctũ signatum & circumferentiam circuli iacentis intercepti, perpendiculares
erunt ex huius ad circumferentiam circuli iacentis. In figuratione itaq; præsen
ti à puncto b prodibit perpendicularis, unus ad partem inclinatiõis, reliquus au-
tem ad partem oppositam. Idem quoq; accidet cæteris punctis in utraq; circumfe
rentiarũ signatis, uerum hoc non interturbabit syllogismũ nostrum, nam hij duo
perpendiculares cum sint æquales semicircumferentiæ per tertij huius, commu
nis animi conceptio eundem ipsis communem donabit sinum, quicquid igitur de
uno arcuũ prædicabit theorema nostrum, & de reliquo demonstratũ habebit.

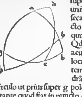
XVI.

In omni triangulo rectangulo omnium laterum sinus ad sinus an-
gulorum, quos subtendunt, eadem est proportio.

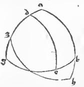


Sit triangulus a b g angulum b rectum habẽs.
Dico ꝙ ꝑportio sinus lateris a b ad sinum anguli a
g b eadem est proportioni sinus lateris b g ad sinũ
anguli b a g, & proportioni, quam habet sinus late-
ris a g ad sinum anguli a b g, quod sic demonstra-
bimus. Necesse est, aut utrunq; angulorũ a & g esse
rectum, aut alterũ eorũ duntaxat, aut nullum. Si uter-
q; eorum rectus est, erit per hypothesim & huius pũ
ctus a polus circuli b g, b autem polus circuli a g
& g polus circuli a b, quare per diffinitionem unuſ-
quisq; trium arcuũ dictorũ determinabit quantitatem anguli se respicientis. idem
igitur erit sinus cuiuslibet trium laterũ & anguli sibi oppositi, & ideo sinus omniũ
laterũ ad sinus angulorũ se respicientiũ, proportionem eandem accipiunt uidelicet
æqualitatis. Si autem alter duntaxat angulorũ a & g fuerit rectus, sit ille, uerbi
gratia, angulus g. tradidit autem & hypothesis angulũ b rectum, quare per hu
ius a est polus circuli b g, & per huius uterq; arcuũ b a, & a g quadrans cir-
cumferentiæ magnæ. per diffinitionem igitur unusquisq; arcuũ a b, b g & g a
quantitatem anguli se respicientis determinabit, eritq; idem sinus cuiuslibet late-
ris & anguli se respicientis conuertendo diffinitionem sinus anguli. unde postre-
mo constabit omnium laterum sinus ad sinus angulorũ se respicientiũ, eandem ha
bere proportionem scilicet æqualitatis. Qđ si neuter angulorũ a & g rectus offe
ratur, non poterit aliquis trium arcuũ lateralium esse quadrans circumferentiæ,
quemadmodũ ex huius trahitur, uerum in triplici uarietate habebũtur. Si enim
uterq; angulorũ a & g fuerit acutus, erit per huius uterq; arcuũ a b & b g mi
nor quadrante, unde & per huius arcus a g minor quarta circumferentiæ. Cre
scat igitur arcus g a uersus a donec fiet quadrans a d, secundum cuius cordam
quæ est costa quadrati magni super puncto g facto polo describatur circulus ma
gnus, secans arcum g b prolongatũ in puncto e. prolongetur demum arcus a g
ad partem puncti g, donec quadrans habebitur a z, cuius corda super polo a cir
cumducta pariat circulũ occurrentem arcui a b continuato in puncto h. Pinxi-
mus hoc pacto unam figurationem. Si uero uterq; angulorum a & g obtusum se
præbeat

præbeat, per media nuperrime commemorata uterq; arcuū a b & b g quadrantem superabit, arcus autem a g quadrante minorem confitebimur. prolongato igitur ut antea utrinq; arcu a g, donec & arcus g d quarta nascetur & arcus a ʒ, super polis g & a duo circuli magni describantur, quorū unius super g scilicet descripti circumferentia necessario secabit arcum g b maiorem quadrante, quod fiat in puncto e, reliqui uero super a descripti, secabunt arcū a b, quod contingat in puncto h. Sic altera surgit figuratio.



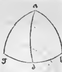
Qđ' si alter angulorū a & g obtusus fuerit, reliquus autē acutus, sit a obtusus & g acutus, erit itaq; ex pallegatis locis uterq; arcuū b g & g a quadrante maior, arcus autem a b minor eo. abscindant̄ ergo ex arcu a g duo quadrātes g d & a ʒ in arcu d ʒ participantes, descriptoq; circulo ut prius super g polo, circumferentia eius secabit arcum b g maiorē quadrante, quod fiat in puncto e, circumferentia autem circuli super a descripti, non secabit arcum a b, cum sit minor quadrante, sed occurret ei quantū sat est porrecto, quod fiat in puncto h. Neutro igitur angulorū a & g recto existente, tametsi figuratiōe triplici utamur, syllogismus tamē erit unicus. Cum enim duo circuli g d & g e ad se inclinati sint, & in circumferentia circuli g d signent̄ duo pūcta, ex quibus duo perpendiculares a b & d e descendunt, erit per præcedentem proportio sinus arcus g a ad sinū arcus a b sicut sinus arcus g d ad sinū arcus d e, & permutatim sinus g a ad sinū g d, sicut sinus a b ad sinū d e. Item duo circuli a ʒ & a h ad se inclinati sunt, signanturq; duo puncta g & ʒ in circūferentia circuli a ʒ, ex quibus descendunt duo arcus perpendiculares g b & ʒ b, quare per præmissam proportio sinus a g ad sinum g b est tanq; sinus a ʒ ad sinum ʒ h, & permutatim sinus a g ad sinum a ʒ sicut sinus g b ad sinum ʒ h, est autem sinus a g ad sinum a ʒ, sicut sinus g a ad sinū g d, ꝙ uterq; arcuū a ʒ & g d quadrans habeatur. Sinus igitur lateris a b ad sinum d e, & sinus lateris b g ad sinum ʒ h, eandem habent proportionē, quā uidelicet sinus lateris a g ad sinum quadrantis. Sinus autē d e est sinus anguli a g b, arcus enim d e determinat quantitatē anguli a g b, puncto g polo existente circuli d e. Similiter sinus ʒ h est sinus anguli b a g. sinus autē quadrantis est sinus anguli recti. quare sinus lateris a b ad sinum anguli a g b, & sinus lateris b g ad sinum anguli b a g, sinus quoq; lateris a g ad sinum anguli recti a b g unam & eandem suscipiunt proportionem, quod erat declarandum.



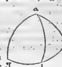
XVII.

In omni triangulo non rectangulo sinus laterum ad sinus angulorum eis oppositorū eandē habent proportionem.

Quam præcedens de triangulis rectangulis prædicabat passionem, præsens quoq; de triangulis non rectangulis enunciat. Sit igitur triangulus a b g, nullū habens rectum angulū. Dico ꝙ sinus lateris a b ad sinum anguli g, sinusq; lateris a b ad sinum anguli b, & sinus lateris b g ad sinum anguli unā & eandē proportionem accipiunt. Demittam enī ex puncto a perpendicularem a d incidentem



tem arcui b g si intra triangulũ manserit, aut occurrentem arcui b g oportune prolongato si extra triangulum ceciderit, quæ neutri arcuum a b & a g sibi conterminalium coincidere poterit. sic em̃ alter angulorum b & g rectus haberetur, quẽ hypothesis nostra non rectum tradidit. Cadat itaq; prius intra triangulũ, distinguens duos triangulos a b d & a g d rectangulos. erit ergo per præcedentẽ terminis permutatis proportio sinus a b ad sinum a d, sicut sinus anguli a d b recti ad sinum anguli a b d. sed & per eandem præmissam proportio sinus a d ad sinum a g tanq; sinus anguli a g d ad sinum anguli a d g recti. cumq; sit idem sinus anguli a d g & anguli a d b, quod uterq; eorum rectus est. erit per æquã proportionalitatẽ indirectã sinus a b ad sinum a g ueluti sinus anguli a g b ad sinum anguli a b g, & permutatim sinus lateris a b ad sinum anguli a g b tanq; sinus lateris a g ad sinũ anguli a b g. Eandem deniq; concludes proportionẽ sinus lateris b g ad sinum anguli b a g, si prius ab altero punctorum angularium b & g ad latus sibi oppositum demiseris arcum perpendicularẽ. Quòd si perpendicularis a d extra triangulum ceciderit mutata parumper figuratione pristinum repetemus syllogismũ.

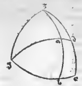


Erit em̃ ex præmissa permutatim arguendo sinus a b ad sinum a d tanq; sinus anguli a d b ad sinum anguli a b d recti. itemq; sinus a d ad sinum a g, sicut sinus anguli a g b ad sinum anguli a d g recti. quare per æquam indirectam erit sinus lateris a b ad sinum lateris a g, sicut sinus anguli a g b ad sinum anguli a b d. sinus autem anguli a b d est etiam sinus anguli a b g per communem scientiam. sinus igitur a b ad sinum a g est ut sinus anguli a g b ad sinum anguli a g b, & ideo permutatis terminis, erit sinus lateris a b ad sinum anguli a g b, tanq; sinus lateris a g ad sinũ anguli a b g. Hanc demũ conuincemus esse proportionem sinus lateris b g ad sinum anguli b a g, quemadmodũ hactenus processimus. Passionem igitur quæ de triangulis rectangulis & non rectangulis singulatim in hisce demonstrabatur theorematibus, communiter tandem de omnibus triangulis qualescunq; fuerint concludere licebit, quæ res quantos & q; iucundos allatura sit fructus pedetentim intuebimur.

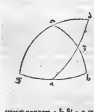
XVIII.

In omni triangulo unicum habente rectum angulum, proportio sinus anguli nõ recti ad sinum anguli recti est, ut sinus complementi anguli reliqui ad sinum complementi lateris eum subtendentis.

Sit triangulus a b g, cuius angulus b quidem sit rectus, neuter autem duorum a & g rectus habeatur. Dico quod proportio sinus anguli b a g ad sinum anguli b recti est, ut sinus complementi anguli a g b ad sinum complementi lateris a b, similiter sinus anguli a g b ad sinum anguli b recti se habet, tanq; sinus complementi anguli b a g ad sinum complementi arcus b g, quod sic demõstrabimus. Quoniam neuter angulorum a & g est rectus, erit aut uterq; eorum acutus uel obtusus, aut alter acutus, & reliquus obtusus. Sit primo uterq; acutus, quamobrẽ per huius utrunq; laterũ a b & b g minus erit quadrante, ideoq; per huius



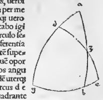
& arcus a g minor exiſtet quadrante, protendatur ergo g a ad partem puncti a, donec fiet quadrans g d, ſecundum cuius cordã ſuper g facto polo circumducatur circulus ſecans arcum g b ſatis prolongatum in puncto e, arcus denique b a ad partẽ puncti a porrectus coincidat circumferentiæ circuli ſuper g polo circumducti in pũcto 3, quẽ ex huius conſtabit eſſe polum circuli g b e, per autem huius uterque arcuũ 3 b & 3 e quadrans habebitur, & angulus 3 e g rectus. quare per diffinitionem arcus a 3 erit complementum lateris a b, arcus autem d 3 cõplementum arcus d e. cũque arcus d e determinet quantitatem anguli a g b, puncto g polo exiſtẽte circuli 3 d e, determinabit arcus 3 d quantitatem cõplementi anguli a g b, quod facilius ducto arcu g 3 cõfiteberis. Eſt autem proportio ſinus anguli b a g ad ſinum anguli a b g recti per huius conuerſim arguendo, ſicut proportio ſinus b g ad ſinũ g a. ſinus demum b g ad ſinum g a, ſicut ſinus d 3 ad ſinum 3 a per huius, quoniam in circumferentijs duorũ circulorũ g a d & 3 a b ſignata ſunt duo pũcta g & 3, à quibus alternatim deſcendũt duo arcus perpendiculares ad circumferentias huiuſmodi circulorũ, g b quidẽ propter angulum a b g rectum ex hypotheſi, 3 d autẽ propter angulum 3 d g rectum, g polo circuli 3 d exiſtente. Sinus autẽ 3 d eſt ſinus cõplementi anguli a g b, & arcus a 3 eſt complementum lateris a b. Proportio igitur ſinus anguli b a g ad ſinum anguli a b g recti, eſt tanquam ſinus cõplementi anguli a g b ad ſinum complementi lateris eum ſubtendentis.



Quòd ſi fuerit uterque angulorũ a & g obtuſus per huius utrũque laterũ a b & b g quadrantẽ ſuperabit, unde & latus a g minus quarta enunciabitur. Creſcat igitur arcus g a, donec arcus g d per a punctũ incedens fiet quadrans, ſecundũ cuius cordã deſcribatur circulus magnus, ſecans neceſſario arcũ g b, quod fiat in puncto e, ſecabit aũt circulus ille neceſſario arcum a b in puncto qui ſit 3. per itaque huius duo arcus g e & e 3 perpendiculariter ſibi inuicem inſiſtent, cũque per hypotheſim arcus a b perpendicularis ſit ad arcum b g angulo b recto exiſtente, erit per huius 3 polus circuli b g, & per corollarium eiuſdẽ uterque arcuum 3 b & 3 e quadrans circumferentiæ. quare per diffinitionem arcus a 3 erit complementum arcus a b, arcus etiam 3 d determinabit complementum anguli a g b, quod apertum uidebitur ſi arcũ g 3 produxerimus. erit enim angulus b g 3 rectus, arcu 3 b quadrante exiſtente, ſinus ergo arcus 3 d erit ſinus complementi anguli a g b. Cum itaque in circumferentijs duorum circulorũ a g & a b ad ſe inclinatorum ſignauerimus duo puncta g & 3, à quibus deſcendunt duo perpendiculares, g b quidem ad arcum a b propter angulum b rectũ ex hypotheſi, 3 d autem ad arcum g d propter g polũ circuli d 3, erit per huius conuerſis terminis proportio ſinus arcus b g ad ſinum arcus g a, tanque ſinus d 3 ad ſinum arcus 3 a, uidelicet tanque ſinus complementi anguli a g b ad ſinum complementi lateris a b, ſinus autem arcus b g ad ſinum arcus g a ſe habet per

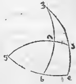
huius

huius permutato terminorum situ, tanq̃ sinus anguli b a g ad sinum anguli a b g recti, & ideo sinus anguli b a g ad sinum anguli a b g recti se habet, sicut sinus complementi anguli a g b ad sinum complementi lateris a b ipsum subtendentis. Postremo alter angulorum a & g sit obtusus, uerbi gratia, angulus a, & reliquus g acutus, erit itaq; per media supradicta arcus a b minor quadrante, uterq; uero arcuum a g & g b quadrantem superabit. resecabo igitur ex arcu a g quadrantem g d, descripto'q; circulo secundum quantiatem g d super g polo, circumferentia eius necessario concurrens cũ arcu g b quadrantẽ superante secabit arcum a b, quod fiat in puncto 3, quẽ oportet esse polũ circuli b g, per huius propter binos angulos apũd b & e rectos, unde & ex corollario eiusdẽ uterq; arcuum 3 b & 3 e quadrans conuincetur. Cũq; arcus d e quantitatẽ anguli a g e determinet, arcu 3 e quadrante existente, arcus d 3 quantitatẽ cõplemẽti anguli a g b determinabit, quod haud incertum affirmabis, ubi arcũ g 3 produxeris. similiter a 3 erit cõplementũ lateris a g. In circũferentijs autẽ duorum circulorum a g & a b ad se inclinatorum (eisdem enim characteribus nunc arcus nunc circulos suos more nostro repræsentamus) signata sunt duo puncta g & 3, à quibus alterni egrediuntur perpendiculares g b & 3 d, quod nõ nisi ex locis cõmemoratis ostendemus, & tandem syllogismo freti pristino concludemus sinum anguli b a g se habere ad sinum anguli a b g recti tanq̃ sinũ cõplementi anguli a g b ad sinum cõplementi arcus eum subtendentis, quod iuuat attigisse. Non aliter procedemus angulũ a g b uice anguli b a g assumentes, cæteris ut res ipsa postulat commutatis.

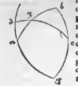


XIX.

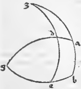
In omni triangulo, cui unicus est rectus angulus, sinus cõplementi lateris rectũ subtendentis angulũ ad sinũ cõplementi alterius rectum ambientiũ, eam habet proportionem, quã sinus complementi reliqui lateris ad sinum quadrantis.



Sit triangulus sphæralis a b g angulũ b rectũ habens, & utrumq; reliquorũ non rectum. Dico q̃ proportio sinus complementi lateris a g ad sinum complementi lateris a b, est ut sinus complementi lateris b g ad totum scilicet sinum quadrantis. item'q; sinus complementi eiusdem lateris a g ad sinum cõplementi lateris b g tanq̃ sinus cõplementi lateris a b ad sinum quadrãtis. Huius demonstrationem afferemus simplicẽ, tametsi triuaria soleat esse figuratio. Si enim uterq; angulorum a & g acutus fuerit, erit per media in præmissis sæpenumero adducta, unũquodq; laterũ trianguli nostri minus quadrante. Prolongetur ergo latus g a ad partem puncti a, donec fiet arcus g d quarta circũferentiæ, secundum cuius cordã super g polo circulus descriptus secabit arcum g b satis continuatum, quod fiat in puncto e. secabit autem & arcũ b a prolongatũ, quod fiat in puncto 3. Si deniq; uterq; angulorum a & g obtusum se præbeat, erit uterq; arcuũ a b & b g maior quadrante, arcus autem a g quadrante minor, quo crescente donec fiet quadrans a d, secundum cordã ipsius describatur



scribatur circulus magnus secans necessario arcum g b quadrante maiorē in puncto qui sit e, arcū autē a g in puncto quem uocabimus 3. Et si postremo alter angulorum a & g obtusus fuerit, uerbi gratia angulus a, reliquus autem acutus, erit uterq; arcuum a g & g b quadrante maior ex allegatis locis, arcus autem a b minor quadrante. Abscindam igitur ex arcu g a quadrātem g d, secandū cuius cordā super polo g circulū magnū describo, qui secet arcū b g in puncto e, & arcū b a cōtinuatum in puncto 3. Quibus ita ordinatis constabit per

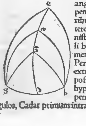


huius 3 esse polum circuli b g propter binos angulos apud b & e rectos, & per corollarium eiusdē utrūq; arcuum 3 b & 3 e esse quadrantem, quare per diffinitionem arcus a 3 est complementū lateris a b, arcus aūt a d complementū lateris a g, & arcus b e cōplementū lateris b g. Cumq; duo circuli 3 b & 3 e ad se inclinati sint, in quorū unius scilicet 3 b circumferētia signantur duo puncta a & b, ex quibus perpendiculares arcus ad circumferentiam alterius descendunt, qui sunt a d & b e, propter binos angulos apud d & e rectos g polo circuli 3 e existente, erit per huius proportio sinus 3 a ad sinum a d, sicut sinus 3 b quadrantis ad sinum b e, & permutatim sinus 3 a complementi, scilicet arcus a b ad sinum quadrantis 3 b tanq; sinus a d complementi lateris a g rectumsubtendentis angulū ad sinū b e complemēti scilicet lateris b g rectū ambiētis, quod pponebat cōfirmandū.

XX.

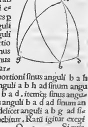
In omni triangulo non rectangulo perpendicularis à uertice anguli cuiuslibet ad latus sibi oppositū demissus cū duobus lateribus sibi conterminalibus duos complectetur angulos, eritq; proportio sinus dextri ad sinum sinistri eorum angulorū tanq; sinus cōplementi anguli dextri ipsius trianguli ad sinū cōplementi anguli sinistri.

Angulum dextrū appello, quem facit perpendicularis cū latere trianguli dextro, Sinistrum autem quē cum sinistro. Sit triangulus a b g, nullū habens rectū



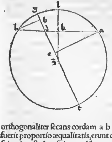
angulū, à cuius anguli uertice descendat arcus a d perpendicularis ad arcum b g, cōplectens cum duobus lateribus trianguli sibi cōterminalibus duos angulos, cum latere quidē a b dextro angulū b a d, cum latere autem sinistro a g angulū a g d. Dico q; proportio sinus anguli b a d ad sinū anguli g a d, est sicut pportio sinus cōplementi anguli a b g ad sinum cōplementi anguli a g b. Perpendicularis em̄ arcus aut cadit intra triangulū, aut extra, cum neutri arcuum sibi conterminaliū coincidere possit. sic nāq; alter angulorum b & g rectus fieret quē hypothesis non rectum tradidit. unde etiam palam q; perpendicularis cum duobus lateribus duos continebit angulos, Cadat primum intra, & sit minor quadrante, quod quidē accidit dū uterq; angu-

angulorum b & g acutus fuerit, quemadmodum ex huius trahitur, non potest autem esse quadrans angulo a b g non existente recto. Extendatur ergo d a usq; ad e donec arcus d e quadratus habeatur, eritq; per huius e polus circuli b g, à quo duobus punctis b & g occurrant duo arcus circulorum magnorum e b & e g, quos oportet esse quadrantes perpendiculariter quidẽ arcui b g insistentes, eritq; per diffinitionem angulus a b e cõplementum anguli a b g, & angulus a g e complementũ anguli a g b. Per autẽ huius conuersis terminis est proportio sinus anguli a b e ad sinum arcus a e tanq; sinus anguli e a b ad sinum quadrantis e b. & per eandem sinus arcus a e ad sinum anguli a g e, sicut sinus quadrantis e g ad sinum anguli e a g. Sinus autem quadrantis e g est etiam sinus quadrantis e b, per æquã igit̃ sinus anguli a b e ad sinũ anguli a g e proportionem habet, quã sinus anguli e a b ad sinum anguli e a g. Cumq; sinus anguli e a b sit etiã anguli b a d, ꝙ similiter sinus anguli e a g sinus habeat̃ anguli d a g, ꝙ bini binis rectis æquipolleant, erit proportio sinus anguli b a d ad sinũ anguli g a d, tanq; sinus anguli a b e, scilicet cõplementi anguli a b g ad sinum anguli a g e, scilicet complementi anguli a g b, quod libuit efficere. Si autem arcus a d quadrante maior extiterit, quod quidem euenit utroq; angulorũ b & g obtuso existente, abscindatur ex eo quadrans 3 d, & à puncto 3 quẽ huius polũ circuli b g demõstrat, duo arcus procedãt duobus punctis b & g occursuri, quos liquet esse quadrantes per huius orthogonaliter insidentes arcui b g, angulus igitur a b 3 est complementum anguli a b g per diffinitionem. itemq; angulus a g 3 complementum anguli a g b diffinietur. Est autem per huius conuersim arguendo proportio sinus anguli b a 3 siue b a d ad sinum quadrantis 3 b, ueluti sinus anguli a b 3 ad sinum arcus a 3. & per eandem sinus quadrãtis 3 g ad sinum anguli g a 3 siue g a d, tãq; sinus arcus a 3 ad sinum anguli a g 3. per æquam igitur sinus anguli b a d ad sinum anguli g a d erit ut sinus anguli a b 3, scilicet complementi anguli a b g ad sinum anguli a g 3, scilicet cõplementi anguli a g b. Cadat demum perpendicularis extra triangulum, altero angulorum b & g obtuso existente, & reliquo acuto, quemadmodum ex huius trahitur. Obuiabit autem perpendicularis arcui g b prolongato ad partem anguli obtusi, qui uerbi gratia sit b, eritq; minor quadrante ꝙ angulus a b d acutus habeatur. extẽdamus igitur eũ donec quadrans fiet ad punctum quidem h terminatus, quẽ oportet esse polum circuli b g huius arguente. ab eo itaq; polo duo arcus egrediantur h b & h g, qui erunt quadrantes orthogonaliter arcui b g incidentes per huius, quo fit ut angulus a b h complementũ anguli a b g habeatur, angulusq; a g h cõplementum anguli a g b. est autẽ per huius conuersis terminis proportio sinus anguli b a h ad sinum quadrantis h b, tanq; sinus anguli a b h ad sinum arcus a h. & per eandem sinus quadrantis h g ad sinum anguli h a g. ueluti sinus arcus a h ad sinum anguli a g h. per æquã igitur proportioni sinus anguli b a h ad sinum anguli h a g, æqualis est proportio sinus anguli a b h ad sinum anguli a g h. sinus autem anguli b a h est et sinus anguli b a d. itemq; sinus anguli g a h est sinus anguli g a d. quare proportio sinus anguli b a d ad sinum anguli g a d, tanq; sinus anguli a b h complementi uidelicet anguli a b g ad sinũ anguli a g h cõplementi scilicet anguli a g b habebitur. Ratũ igitur exegimus quod proponebatur.



XXI.

Si quis arcus notus minor semicircumferentia in duos diuidatur, quorum sinus proportionem habeant datam, uterq; eorũ notus erit.



Sit arcus a g b datus minor semicircũferentia diuisus in duos arcus a g & g b, sitq; proportio sinus arcus a g ad sinum arcus g b data. Dico φ uterq; arcuũ partialium a g & g b datus habebitur. Subtendatur enim arcui a g b corda sua a b, ducaturq; per punctum g & centrum circuli 3 diameter circuli secans cordam a b in puncto d. ex punctis autem a & b arcum a b terminantibus duæ rectæ descendant perpendiculares ad diametrum, quæ sint a e & b h, quarum utranq; constat esse sinũ rectum arcus sibi cõterminalis, a e quidem arcus a g, & b h arcus b g. educatur etiam semidiameter 3 l orthogonaliter secans cordam a b in puncto k. Si igitur proportio sinuũ data fuerit proportio æqualitatis, erunt duo arcus a g & g b æquales per communẽ scientiam sinibus suis æqualibus existentibus. cumq; totus arcus a g b sit notus, erit & uterq; arcuũ a g & g b notus ex primi huius. Si uero proportio dictorũ sinuũ nõ fuerit proportio æqualitatis, erit alter eorũ altero maior. sit itaq; a e maior sinu b h, unde & arcus a g maior erit arcu g b. cum autem proportio a e ad b h sit nota, oportet eam in terminis notis reperiri per diffinitionem proportiõis datæ, & ideo per quintã primi huius in numeris notis, qui sint r & s, r quidẽ maior, & s minor, ita ut sit proportio sinus a e ad sinum b h sicut r ad s. cum autẽ duo trianguli a e d & b h d rectanguli duos angulos apud contrapositos habeant æquales, erunt ipsi per 32. primi æquianguli, & ideo per 4. sexti proportio a e ad b h sicut a d ad d b, proportio autem a e ad b h erat tanq; r ad s, quare & proportio a d ad d b est ueluti r ad s, & coniunctim a b ad b d sicut r s ad s, tres autem harum quantitatũ notæ sunt, r s quidem propter duos numeros r & s notos, numerus autem s ex eis quæ supradicta sunt, corda deniq; a b propter arcum a g b notum, intercedente tabula sinuũ aut cordarũ, quarta igitur scilicet linea b d nota ueniet per primi huius, est autem b k nota medietas cordæ a b per tertij, reliqua igitur d k nota erit. educta insuper semidiametro 3 a, erit triangulus 3 a k rectangulus, cuius duo latera 3 a & a k nota sunt, unde & per primi huius linea 3 k nota prodibit. triangulus itaq; 3 d k duo latera 3 k & k d habens cognita, angulũ d 3 k cognitum afferet per primi huius, qui quidem ad quatuor rectos eam habet proportionem, quã arcus g l ad totam circumferentiã, quemadmodũ ex ultima sexti trahitur, arcus igitur g l notus habebitur, quem si arcui a l dimidio scilicet arcus a g b addideris, resultabit arcus a g notus, ipse demum ex eodem arcu dimidio, siue ex arcu b l ablatus relinquet arcum g b cognitum, uterq; igitur arcuũ partialium notus habebitur, quod pollicebatur nostrũ theorema. Possumus autem & ea quæ demonstrauimus applicare ad arcum semicircumferentia maiorem, ut si arcus a t b notus diuidatur in duos arcus a t & t b, quorum sinus proportionem habeant notam, dum tamen uterq; arcuum partialium fuerit minor semicircumferentia, sic enim necesse est diametrũ circuli per

punctum

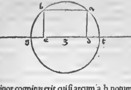
punctum t transeuntem, quæ sit t g secare cordam a b arcus a t b, quæ & arcui a g b communis, unde & secabit arcum a g b minorem semicircumferētia, & distinguet ex eo duos particulares arcus scilicet a g & b, quorum sinus proportionem habebunt datam, quoniam & huiusmodi sinus communes sunt duobus arcubus a t & t b, utrunque igitur arcuum a g & g b ex suptadictis cognitum subtrahemus à semicircumferentia, & relinquetur socius suus, arcus uidelicet in sinu secum participans. Quòd si arcus a g b fuerit semicircumferentia, & diuidatur in duos arcus a g & g b ut cōtingit, tametsi fuerit data proportio sinus illius ad sinum istius, quā oportet esse proportionem æqualitatis per communem scientiā, non tamen alter eorum necessario dabitur, infinitis enim modis potest diuidi arcus ille, qui est semicircumferentia proportione sinuum, quos habent arcus particulares, nō mutata. ¶ Operationē hoc pacto perficies. Si proportio sinuum data fuerit æqualitatis, arcum datū dimidiabis, & habebis duos particulares arcus cognitos. Si uero fuerit inæqualitatis, duos terminos eius congregabis, collectumque pro primo statuas numero, minorem autem terminū proportionis datæ pro secundo, & numerum cordæ arcus dati pro tertio. multiplica igitur secundū per tertiū, & productum diuide per primum, quodque exibit à dimidia corda arcus dati auferas, & residuum custodias, deinde semidiametro circuli in se multiplicata, aufer quadratum dimidiæ cordæ arcus dati, quod autem relinquetur quadrato eius, quod custodiri præcepimus, coniunge, & collecti radicem elice quadratam, custoditū denique per sinū totum extende, & productū in radicem elicitam distribuas, exibit enim sinus differentiæ, quæ est inter dimidiū arcum datum, & utrunque arcuū quæsitorū quā ex tabula sinus inuentā minue ex dimidio arcu dato, & relinquetur arcus minor quæsitus, aut eidem adde, ut resultet arcus maior. In exemplo. Ponatur arcus 40. graduum, & proportio sinus arcus a g maioris ad sinum arcus g b minoris, sicut 7. ad 4. colligo 7. & 4. fiunt 11. pro primo numero: 4 autem accipiam pro secundo, & 41042. scilicet cordam arcus dati pro tertio, multiplico 41042. per 4. producuntur 164168. quæ diuido per 11. exeunt 14924. linea uidelicet d b, quā subtrahe à medietate cordæ manenti 5597. custodienda pro linea d k. Item semidiameter siue sinus totus 60000. quæ duco in se, producuntur 3600000000. à quo aufero quartū dimidiæ cordæ, quod est 421111441, manebunt 3178888559. hoc addo quadrato lineæ d k scilicet 31326409. resultāt 3210214968. huius radix quadrata ferè est 56659. quam seruo, deinde multiplico numerum lineæ d k per sinum totum, producuntur 335820000. quæ diuido per radicem seruatam, exeunt 5927. huius arcus 5. 40. ferè, quem deme ex dimidio arcu dato scilicet 20. manēt 14. 20. arcus scilicet g b. item eidem ipsum addo, ueniunt 25. 40. & totus ferè habebitur arcus a g.

XXII.

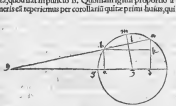
Si data fuerit differentia duorum arcuum cum proportione sinuū suorum, uterque eorum cognitus habebitur.

Duos arcus a g & g b cōterminales intelligantur, minorque qui est g b pars maioris a g, quorum differentia sit data arcus uidelicet a b, eorumque sinus habeant datā proportionem. Dico quod uterque eorum notus reddetur. Incedat enim per g terminum communem arcuū dictorum & centrum circuli z linea recta utrinque indefinita, diametrum tamen circuli g t complectens, educaturque semidiameter z m secans cordam a b orthogonaliter in puncto l, à punctis autem a & b cordā a

b termi



b terminantibus duæ perpendiculares a d & b e ad diametrum descendant, quas constat esse duos sinus arcuũ a g & g b. Si itaq; ipsi fuerint æquales, hoc est, proportio sinuũ data fuerit proportio æqualitatis, erit per communem scientiã arcus g b æqualis arcui a t. dempto igitur a b noto per hypothesim ex semicircumferentia nota, residui medietas, arcus scilicet b g minor cognitus erit, cui si arcum a b notum adieceris, prodibit arcus a g maior cognitus. Si uero alter sinuum maior reliquo extiterit, sit uerbi gratia arcus maioris a g sinus, maior sinu arcus minoris b g, abscindaturq; ex sinu a d linea recta k d æqualis ipsi b e, ducta linea b k, quæ per primi æquedistabit lineæ e d, unde & per primi angulus e b k rectus habebitur angulo e d k recto existẽte & ideo angulus a b e rectum superabit. Producta autem linea ab a per b indefinita ex parte puncti b, erit reliquus angulus apud b acutus. cumq; sit angulus g b e g rectus, linea dicta a b satis porrecta concurret cũ linea t g oportune prolongata, quod fiat in puncto h. Quoniam igitur proportio a d ad b e data est, in numeris eã reperiemus per corollariũ quitæ primi huius, qui sint r & s, r quidẽ maior numero s. quorũ differentia sit x. Est autẽ per primi & quartam sexti proportio a d ad b e, & ideo r ad s tanq; a h ad h b, quare disiunctim a b ad b h sicut differentia numerorum r & s, uidelicet x ad ipsum



numerum s. cumq; tres harum quantitatum proportionalium sint datæ, a b quidẽ cordam arcus suus notificat per tabulã sinuum aut cordarum, erit & linea b h nota, & ideo tota a h cognita ueniet. item b l medietas lineæ a b notæ non erit incognita, unde & linea h l data comparabitur. Quod igitur sub a h & h b continetur per primi huius notum erit, ipsum autem æquatur ei quod sub t h & h g per tertij, quamobrem quod sub t h & h g continetur notum erit, cui si quadratum semidiametri z g notæ adiecerimus, resultabit per sextã 2. quadratũ lineæ h z notum, unde & ipsa h z linea cognoscetur. Trianguli ergo z h l rectanguli duo latera z h & h l nota sunt, quare per primi huius, angulus eius h z l notus erit, cuius deniq; numerus arcum g m notum faciet, ad quem si arcũ m a, medietatem scilicet arcus a b dati adiunxeris, arcum a g notum habebis, itẽq; si ex eodem arcu g m dimidium arcum datum reieceris, arcus b g notus relinquetur, quod hactenus expectauimus. Quod si maior duorum sinuum minoris fuerit arcus, ut si quis offerat proportionem sinus arcus b t ab sinum arcus a t, cũ arcu a b noto, non aliter q̃ nupertime peragendũ erit, donec elicietur arcus b g cognitus

cognitus, quo dempto ex semicircumferentia, relinquetur arcus b t notus, cui si arcum a b ex hypothesi notum subtraxeris, arcum minorem a t notū relinques. ¶ Operatio. Si data proportio sinuū fuerit æqualitatis, subtrahe arcū datum ex semicircumferentia, & residui dimidium erit arcus minor quæsitus, cui si arcū datum adieceris, resultabit arcus maior. Si uero fuerit proportio inæqualitatis, & sinus maioris arcus maior sinu arcus minoris, differentiā terminorum proportiōis datæ constitue primum numerum, terminum autem minorē pro secundo, & cordam arcus dati, qui est differentia arcuum quæsitorum, pro tertio. Multiplica igitur secundum per tertium, & productum diuide per primū, & quod exibit addas cordæ dimidiæ arcus dati, collectumq; serua. Idem quoq; adde toti cordæ arcus dati, & collectum multiplica per id quod cordæ toti & eius medietati addidisti, eiq; quod producitur, quadratum semidiametri, scilicet sinus totius adijcias, huius demum aggregati radicem elice quadratā. Deinde quod supra seruatum iri iussimus, per sinum totum multiplica, & productum diuide in radicem iam elicitam, ab exeuntisq; arcu dimidium arcū datum minue, & relinquetur arcus minor quæsitus, quē & eidem si addideris, maiorem arcum quæsitum numerabis. In exemplo. Ponatū proportio sinus arcus a g, ad sinum arcus b g, sicut 20. ad 13. sitq; differentia arcuum 40. huius corda est 41042. differentia 20. 4. 13. est 7. Multiplico igitū 41042. per 13. producuntur 533546. quæ diuido per 7. exeunt 76221. linea scilicet b h. huic addo medietatem cordæ a b, scilicet 20521. resultant 96742. linea scilicet b h. item colligo 76221. & 41042. ueniunt 117263. quæ multiplico per 76221. procreantur 8937903123. quibus addo quartum sinus totius, quod est 3600000000. colligunt 12537903123. huius radix quadrata est 111973. quā seruo, deinde multiplico 96742. p 60000. pducunt 5804520000. q̄ diuido p 111973. exeūt 51839 sinus scilicet arcus m g, qui erit 59 45. à quo aufero 20. manebit arcus b g 39. 46 item adde 20. ueniunt 79. 46. & tantus computabitur arcus a g.

XXIII.

Si angulum notum in duos particulares secueris angulos, quorum sinus proportionem habeant datam, uterq; eorum notus erit.

Hæc ad angulos superficiales & planos rectilineos & sphærales accōmodabitū. Sit angulus huiusmodi notus a 3 g diuisus in duos a 3 b & b 3 g, sitq; proportio sinus anguli a 3 b ad sinum anguli b 3 g data. Dico q utrumq; eorum cognoscet Geometra. Super uertice enim anguli, scilicet puncto 3 facto cētro, si planus & rectilineus fuerit, secundū quantālibet distantiam describatur circulus a b g, aut super puncto 3 facto polo secundum cordā quadrantis magni circulus a b g circumducatur, prolongenturq; tria latera angulos particulares complectentia, donec obuiabunt circumferentiæ descripti circuli in punctis a, b, & g. Vnusquisq; igitur trium arcuum, a g quidem totalis, & duorum partialiū a b & b g quantitatem anguli se respicientis determinat, unde & sinus illorum arcuum tāq; sinus angulorum suorū censebimus. Oportet autem arcum a g esse notum per 19 primi huius, sed & sinus duorum arcuum a b & b g, qui sunt etiam angulorum suorum, proportionem habebunt notam. quare per huius uterq; illorum arcuum notus erit, & ideo per corollarium primi huius uterq; angulorum a 3 b & b 3 g notus habebitur, quod erat deducendum. Operatio huius ab opere huius in nullo discrepat, nisi q uice angulorum arcus se determinantes accipias.

XXIIII.

Data differentia duorum angulorum, & proportione sinuum suo-

 rum

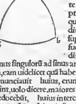
rum, utriusq; eorum quantitatem addiscemus.

Hanc ex huius non aliter q̄ præmissam ex emanare constat. nihil enim noui admiscetur, quod non colligantia angulorum & arcuum se determinantium administret. Quæ hactenus lucubrauimus, fuere præambula artis triangulorū sphæralium, nunc rem ipsam ingrediamur. Habet autem triangulus sphæralis tria latera & tres angulos, quorum tribus quibuscūq; cognitis, reliqua tria cognoscenda uia parata est. Demonstrabimus enim q̄ in omni triangulo sphærali ex arcubus circulorum magnorum constante, cui non sunt duo recti anguli, siue duo latera cū uno angulo, siue duos angulos cum uno latere, aut tria latera, aut tres angulos notos habuerimus, reliqua tria non latebunt. Cūq; non possint esse plures cōbinationes huiusmodi, omnem hoc pacto triangulorum sphæralium artē absoluemus, & quidem planissime, quæ res q̄ utilis quamq; iucunda ueniat Astronomo, non satis dici potest. Vt autem res ipsa cognita facilior existat, libuit intermiscere numeros exemplares, sæpe etenim obscuritatem propositionis, numerorū soluit accōmodatio. Huius operationem facile comparabis, si pro angulis uniuersis arcus se determinantes acceperis, quemadmodum in præcedenti.

XXV.

Omnis triangulus unicum habens rectum angulum, cum duobus lateribus cognitis, reliquum latus reliquosq; angulos latere non sinet.

Trianguli a b g angulum b rectum habentis, duo latera quæcūq; sint cognita. Dico q̄ reliquum eius latus notum erit cū reliquis duobus angulis. Erit enim proportio sinus complementi arcus a g, ad sinum complemēti a b, sicut sinus cōplementi b g ad sinum quadrantis. Ex quatuor itaq; quantitatibus proportionalibus tres notæ sunt propter duo latera nota per hypothesim cum quadrante notos. Vnde & per 19. primi huius quarta nota erit, uidelicet sinus complementi a g tertij lateris, quare ipsum complementum quod nunq̄ quadrāte maius existit cognitum habebitur, quod quidem demptum ex quadrāte, relinquet latus tertium notū, si ipsum quadrante minor extiterit, aut complementum illud additum quadranti, latus illud notum efficiet, si quadrantē superauerit. Vtrum autem minus quadrante aut maius fuerit, docebunt quantitates laterum datorum, huius dirigente. Tria igitur trianguli latera sunt cognita, cūq; sinus singulorū ad sinus angulorum sibi oppositorum proportionē habeant notam, eam uidelicet quā habet sinus a g ad sinum anguli a b g recti, quemadmodū enunciauit huius, erunt & sinus reliquorū angulorū noti, anguli aūt ipsi quales sint, uolo dicere, maiores recto an minores duorū laterū se respicientiū quātitates edocebūt, huius intercedēte, quare & oēs anguli noti erūt. ¶ Opatio. Si duo latera rectū ambientia fuerint data, multiplica sinū cōplementi alterius eorū per sinum complementi lateris reliqui, quodq; producetur in sinum totū, scilicet quadrantis partiare. exibit enim sinus complementi lateris rectum subtendentis, cuius arcū, scilicet ipsum complementum demes ex quadrante, si utrūq; datorum laterum aut maius quadrante fuerit aut minus eo, & relinquetur quātitas lateris rectū respicientis angulum. si uero alterū ex datis lateribus quadrante maius, reliquū uero minus extiterit, complementum ipsum quadranti adijcias, & resultabit latus quæsitū. Quod si alterū datorum laterū recto opponat̄, multiplicabis sinū complementi



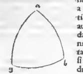
menti lateris rectum subtendentis per sinũ quadrantis, producto enim diuiso per sinum reliqui lateris dati exibit sinus complementi lateris quæsiti, cuius arcũ, scilicet complementum ipsum ex quadrante minuas, si utrumq; datorum laterũ quadrante aut maius aut minus extiterit, si uero alterum eorum maius, & reliquũ minus quadrante occurrat, complementum ipsum quadranti adiectum, latus tertiũ manifestabit. Hæc pro latere tertio reperiendo. Duos autem angulos non rectos (rectus enim quilibet notus est) hoc pacto metieris. Sinum lateris oppositi angulo quæsito per sinum quadrantis extende, productumq; per sinum lateris rectum subtendẽtis partiaris, exibit eñ sinus anguli quæsiti, cuius arcũ in tabula sinus accipias: maiorẽ quidem si arcus ipsum respiciẽs angulũ maior quadrãte fuerit, minorem uero si minor. omnem quippe sinum duobus respõdere arcubus perspicuũ est. In exemplo. Offeratur arcus a b 20. graduum, & b g 36. libet inuenire arcũ a g. Complemẽtum arcus a b est 70. cuius sinus est 56382. Complementũ arcus b g est 54. cuius sinus est 48541, dũ sinus totus, scilicet quadrantis est 60000. quẽadmodũ in tabula nostra constituimus. Multiplico igitur 56382. per 48543. producuntur 2736838662. quæ diuido per sinum totum 60000. exeunt 45614. sinus scilicet complementi arcus a g, huius arcus est 49. 29. complementum scilicet arcus a g, quod minuo ex 90. relinquuntur 40. 31. & tantus erit arcus a g. Sed ponatur latus a b 160. & latus b g 144. sinus complementorũ sunt, quibus nunc usi sumus, ueniet'q; latus a g quantum antehac elicitum est, oportet enim arcum a g minorem esse quadrante. Quòd si latus a b fuerit 20. & b g 144. licet sinus priores redeant & complementum arcus a g idem quod prius, ipsum tamen nunc addendum est quadranti, ut habeatur arcus a g, ꝙ alter arcuum a b & b g minor quadrante sit re, & reliquus maior eo. Sit demum latus a b 20. graduũ, a g autẽ 50. complementũ a b est 70. cuius sinus 56382. complementũ a g 40. cuius sinus 38567. multiplico 38567. per 60000. producuntur 2314020000. quæ diuido per 56382. exeunt 41042. (quod enim propinquũ est uero, ueritatis utimur uice) hic est sinus cõplemẽti arcus b g, cuius arcus 43. 10. ferè, quẽ demo ex 90. relinquunt 46. 50. pro arcu b g. tantus deniq; haberetur arcus b g, si arcus a b fuisset 160. & arcus a g 130. quoniã utrobiq; arcũ b g minorem quadrãte oporteret esse. Si uero arcus a b fuerit 20. & arcus a g 130. erit arcus b g maior quadrante, repetitoq; opere pristino, quoniam eidem erunt numeri, ueniet complementũ arcus b g iterum 43. 10. addendum quidem quadranti, quo facto congregabuntur 133. 10. tantusq; numerabitur arcus a g quæsitus. Hæc de lateribus. Postremo libeat inuenire angulum a g b arcu a b existente 20. & b g 50. Sinus 20. graduum est 20521. Sinus 50. est 45963. Multiplico 20521. per sinum totum, producuntur 1231260000. quæ diuido per 45963. exeunt 26788. sinus uidelicet anguli a g b, cuius arcus minor est 26. 31, determinans quantitatem anguli a g b, quoniã arcus a b minor est quadrãte. & tantus censebitur etiã angulus a g b. Si aũt arcus a b superaret, angulus a g b recto maior haberetur. Vnde accipiendus esset arcus maior respondens sinui prædicto, qui est 153. 29. & tantum pronunciaremus angulum a g b. Non aliter ad notitiam anguli b a g perducemur.

XXVI.

Tribus angulis trianguli rectanguli cognitis, omnia eius latera patefient.

Sit triangulus a b g cuius tres anguli noti habeantur. Dico ꝙ omnia eius latera fient cognita. Aut enim duo eorum sunt recti, aut unus tantũ. Si duo, sint ipsi

uerbi gratia, b & g, erit igitur per huius pũctus a polus circuli b g, & per huius uterq; arcuum a b & a g quadrans cognitus, sed & arcus b g determinat quantitatem anguli b a g noti, unde & ipse notus habetur. Tria itaq; trianguli latera nota reddidimus, Si uero unus duntaxat angulus, uerbi gratia, b sit rectus,



huius consulemus. erit enim proportio sinus anguli b a g ad sinum anguli a b g recti, tanq; sinus complemẽti anguli a g b ad sinum complementi lateris a b, tres autem horum sinuũ notos faciũt anguli per hypothesim dati, quare & sinus complementi arcus a b cognitus ueniet, cuius arcus, uidelicet ipsum complementũ ex quarta circumferentiæ demptus relinquet arcum a b notum si arcus a b minor quadrante extiterit, aut additus quadranti ipsum arcũ a b notum cõstituet, si arcus a b quadrantẽ supauerit. Arcus autẽ a b qualis fuerit respectu quadrantis, angulus a g b huius dirigente indicabit. Similiter per omnia notũ reddemus latus b g, & tandẽ per præcedentẽ latus tertiũ a g innotescet. Verũ inuento arcu a b hãc uiã ingredi licebit. Proportio sinus anguli a g b per huius ad sinum arcus a b est ut sinus anguli b a g ad sinum lateris b g. Tres autem huiusmodi sinus noti sunt, quare & quartus, & ideo arcus b g cognitus habebitur. Similiter reperiemus arcũ a g mediante angulo a b g recto. Cautum profecto te uelim esse in accipiendis arcubus per sinus datos, ne centies idem repetendo membrana cõtaminetur. unumquemq; em̃ sinũ minorẽ sinu toto duobus respondere arcubus sæpenumero dictũ est, quorũ alter quadrante maior, alter eo minor existit. Volenti ergo sinui dato arcũ suum reddere, cõsiderandum est, sit ne arcus suus maior qnadrante aut minor eo, quòd nimirũ superiores conclusiones satis apertũ tradidere. Idem præterea de cõplementis arcuum & angulorũ obseruandũ est, quẽadmodum enim unumquodq; cõplementũ arcuale duobus seruit arcubus, quorũ alter quadrante maior, alter autem eo minor est, ita & omne cõplementum angulare duos respicit angulos, hunc quidẽ maiorẽ, illũ autẽ recto minorem. Si igitur cõplemento arcuali reddere conaris arcũ suũ, prius exploratũ habeas, sit ne arcus ille maior quadrante aut minor eo. si maior, cõplementum suum additũ quadranti arcum constituet quæsitũ. si uero minor, cõplementũ ex quadrante reiectum arcus quæsiti relinquet quantitatem. Non aliter circa angulos procedemus, nisi q; ubi pridem arcus erat, nunc angulum intelligamus. ¶ Operatio huius. Si triangulus habuerit duos rectos, iam conclamatũ est, utrunq; em̃ laterũ eos subtendentium erit quadrans notus. tertiũ autem latus eũ, quẽ angulus se respiciens sortitur numerum. Si uero unus duntaxat rectus fuerit, multiplica sinum complemẽti anguli non recti, quem subtendit latus quæsitum per sinum totum, & productum diuide per sinum reliqui anguli non recti, exibit enim sinus complementi arcus quæsiti, cum quo, ut supra monuimus, operabere. Ad reliqua demum cognoscenda latera, multiplicabis sinũ arcus iam inuenti per sinũ anguli respicientis aliud latus quæsitum, siue rectus siue non rectus extiterit, & productum partieris per sinum anguli quẽ subtendit latus nuper inuentũ, exibit enim sinus lateris quæsiti, cũ quo ut antea præcepimus, latus ipsum elicies. In exemplo. Sit uterq; angulorũ b & g, 90. graduũ, & angulus a 40, erit uterq; arcuum a b & b g 90 graduũ, & arcus b g 40. Sed ponatur angulus b rectus, angulus uero a 50 gr. & angulus g 70. uolo inuenire arcum b g, sinus 50 gr. est 45963. Sinus complementi 70. gr. est 20521. quem duco in sinum totum, producuntur 123126000 0. hæc diuido

per

per 45963. exeunt 26788. sinus scilicet complementi arcus a b, cuius arcus scilicet ipsum complementum est 26.31. quem demo ex quadrante, ꝙ arcum a b minorem esse quadrante oporteat angulo g acuto existente, & relinquuntur 63.29. tantusq́ computabitur arcus b g. Rursus pro latere b g metiendo, sinus anguli g, qui ponebatur 70 est 56382. sinus lateris b g, quod iam nunc reperimus 63.29. est 53688. quem multiplico per sinū anguli a, qui erat 45963, producuntur 2467661544. quæ diuido per 56382. exeunt 43767. sinus scilicet lateris b g, cuius arcus minor est 46.50. & tantus est arcus b g, quoniam angulus b a g ponebatur acutus. Similiter reperiemus arcum a g, nihil prorsus uariando, nisi ꝙ loco anguli b a g angulum a b g rectum constituamus.

XXVII.

Vno latere trianguli rectanguli cum altero duorum non rectorum cognito, & angulum reliquū cum lateribus reliquis inuenire.



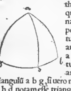
Sit triangulus a b g, angulum b rectum habēs, duosq́ a & g non rectos, quorum alter, uerbi gratia, g sit datus cum uno latere quocunq;. Dico ꝙ angulus a cognitus erit, & reliqua duo latera. Si enim latus datum angulo dato opponatur, ut in figura est latus a b huius consulemus, erit enim conuersis terminis proportio sinus anguli a g b ad sinum lateris a b tanq̃ sinus anguli a b g recti ad sinum lateris a g, tribus autem primis quantitatibus cognitis, quarta dabitur nota, & ideo arcus a g cognitus. ex duobus demū lateribus a b & a g iam cognitis huius intercedente, & latus b g & angulus b a g numerabuntur. Non aliter argumentabimur latere dato rectum angulū subtendente, erit ex præallegato theoremate proportio sinus anguli a b g recti ad sinū lateris a g dati, sicut sinus anguli a g b dati ad sinum lateris a b, sic iterū duo latera a g & a b cognita uenient, cætera ut prius. Qđ si latus datū recto angulo subiaceat, anguloq́ non recto dato, quale est in figura latus b g ad huius refugiendū est, per eam enim ꝓportio sinus anguli a g b ad sinum anguli a b g recti est, ut proportio sinus complementi anguli b a g ad sinum complementi arcus b g. tres autem harum quantitatū sunt notæ, de prima & secunda nemo hesitat, quarta uero cognita erit, propter arcum b g datum, hinc sinus complementi anguli b a g notus occurret, ideoq́ angulus ipse non latebit. Habebimus igitur tres trianguli cognitos angulos, quamobrem auxilio præcedentis reliqua duo latera innotescent. ☞ Operatio. Si latus datum angulo non recto dato oppositum fuerit, multiplica sinū ipsius lateris per sinum quadrantis, quodq́ procreabitur, per sinum dati anguli partiaris, exibit enī sinus lateris rectū subtendentis, cognito autem ipso latere per sinum suū, ad opus huius confugiendū est. Si uero latus datum recto opponatur angulo, sinū eius per sinum anguli dati extendas, & productū diuidas per sinū totum, existentis enim arcus est ipsum latus quæsitū, deinde operationem huius repetito. Quòd si angulus rectus & reliquus angulus datus lateri dato insideant, sinū lateris dati per sinū complementi anguli dati multiplices, & productū per sinū totum partiaris, exibit enim sinus cōplementi anguli b a g, quo intercedente angulus ipse notus habebitur, deinceps uero opus præmissæ repetemus. In numeris exemplaribus sic habeto. Ponaē angulus g 36. gr. & latus a b 20. gr. est sinus 36. gr. est 35267. sinus 20.

20521. quem multiplico per sinum totum, producuntur 1231260000, hunc diuido per 35267. exeunt 34912. sinus scilicet lateris a g. inuenio igitur ex tabula latus a g 35.35. deinde pro latere & angulo reliquis ad numeros huius refugio. Sed maneat angulus g quantus erat, & sit latus a g 20. gr. multiplico sinum 36. gr. qui est 35267. per sinum 20. gr. scilicet 20521. procreantur 723714107. quae diuido per sinum totũ, exeunt 12062. sinus scilicet arcus a b, quare ipse arcus a b erit 11.36. reliqua per huius numerabimus. Ponatur demum angulus a g b, ut prius 36. & arcus b g 20. Sinus 36 est 35267. Sinus complementi 20. est 56382. quem duco in 35267. producuntur 1988423994. hoc diuido per sinum totũ, exeunt 33140. scilicet sinus complementi anguli b a g, cuius arcus est 33.32. hic demptus ex 90. relinquet 56.28. & tantus habebit angulus b a g. ipsum eñ minorẽ esse quarta circumferentiae, arguit arcus b g datus minor quadrãte. Reliqua tandem per operationẽ praecedentis absoluemus. Non egreferas, si solito prolixiores in his tribus propositionibus uideamur, id enim postulat tenor operationis, nõ nihil morae attulit exemplaris numerorũ manuductio, in qua si te satis exercueris, totã fermè artem triangulorũ sphaeralium facilem arbitraberis.

XXVIII.

Cognitis duobus lateribus trianguli nõ rectanguli datũ angulum cõtinentibus, reliquũ latus reliquosq; angulos cognitum iri.

Trianguli a b g nõ rectanguli duo latera a b & b g sint data cũ angulo b. Dico q & latus a g, & duo anguli a & g innotescent. Descendat enim ex termino alterius datorũ laterũ ad reliquum, perpendicularis, quae necessario intra triangulum consistet aut extra eum cadet, neutri enim laterũ sibi conterminaliũ poterit coincidere, sic eñ idem angulus & rectus haberetur & non rectus. Vtrum autẽ horũ fiat nondũ sciendi allata est facultas, id enim non immediate pendet ex hypothesi, sed paulo post exploratum dabimus. Cum autem à quolibet puncto sublimi extra circũferentiam circuli signato possimus demittere duas perpendiculares, hoc in proposito eam duntaxat eligemus, quae subtendit angulũ datum. Sit itaq; haec perpendicularis a d, habebit ergo triangulus a b d angulũ b non rectum notum cum latere a b, quare per praemissam uterq; arcuũ a d & d b cognitus ueniet. si itaq; arcus b d nunc inuentus minor fuerit arcu b g dato, constabit perpendicularem cecidisse intra triangulũ a b g, si uero maior extra, oportet autem differentiam duorũ arcuũ b g & b d notam esse, triangulus igitur a g d rectangulus duo latera a d & d g habens nota per huius latus suũ a g, quod & triangulo a b g commune est, duosq; angulos d a g & d g a notificabit. triãgulus itaq; propositus a b g tria latera nota sunt, cũ duobus angulis a b g quidẽ per hypothesim, a g b autẽ per argumentationem, erat autem & uterq; angulorũ b a d & d a g notus, quibus collectis, si perpendicularis intra triangulũ ceciderit, aut minori eorũ à maiori subtracto, angulũ b a g addiscemus, quae fuere declaranda. Diceres forsitan, proportio sinus arcus a g per argumentationem cogniti, ad sinũ anguli a b g, quem dedit hypothesis, sit ut sinus arcus b g noti per hypothesim ad sinũ anguli b a g huius demonstrante, cumq; tres harũ quantitatũ sint notae, & ideo oporteat sinum anguli b a g fieri notum, nonne facilius hoc pacto per unicam operationem inueniemus angulũ b a g, q ingeminando opus duobus angulis b a d & d a g di

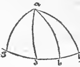


uisim

uisim cognitis, ipsum angulum b a g eliciemus. Respondeo tibi sinum quidem anguli b a g hac uia reperiri q̃ latissime, quæ tñ duobus respondente angulis incertum est uter eorum eligendus sit, id autem minime turbabit uiam nostram, quoniam uterq; angulorum b a d & d a g qualis sit respectu anguli recti certum tradidimus.

XXIX.

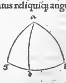
Cognitionem duorum laterum trianguli non rectanguli, & anguli uni eorum oppositi, inuentioni reliqui lateris & reliquorum angulorum minime sufficere.



Similem passionem de triangulis planis rectilineis demonstrauimus in primo huius angulo dato existente acuto, quam nunc de sphæralibus prædicabimus, siue angulus datus fuerit acutus, siue obtusus. Sit enim angulus sphæralis b a g, duobus arcubus æqualibus b a & a g contentus, quorũ uterq; minor sit quadrante, copulenturq; duo puncta b & g per arcum circuli magni b g, qui secetur per mediũ in puncto d descendente arcu a d, in arcu autem g b prolongato, signetur punctus h ubilibet, sic tamẽ, q arcus g h sit semicircũferentia ducto arcu a h. Cum igitur duo trianguli a b d & a g d sint æquilateri, erunt & æquianguli per tertij huius, & ideo duo anguli apud d sunt recti, & angulus b a d est acutus, erit per huius arcus b d minor quarta circumferentiæ, est autem & a b minor quarta, quare per huius & arcus a d minor quadrante declarabitur, unde & per huius angulus a h g acutus erit. Offerenti ergo nobis duo latera g a & a h cognita, aut duo b a & a h ipsis æqualia, cum angulo a h g, neq; tertium latus, neq; reliquos angulos reddere poterimus, nam duo trianguli g a h g & b a h, etsi in omnibus quantitatibus datis participent, latera tamẽ tertia sortiuntur uaria, quemadmodũ in figura claret. Idem declarabitur angulo h obtuso existente. Repetitæ enim pristinæ figurationi iterum dabimus locũ hoc uno uariato, q uterq; arcuũ a b & a g æqualiũ quadrantẽ excedat, erit enim ut nuper angulus b a d acutus, & ideo per huius arcus b d minor quarta, cumq; sit arcus a b maior quadrante, erit & arcus a d quadrante maior, & ideo per huius angulus a h g obtusus, cætera ut antehac prosequemur.

XXX.

Duobus lateribus trianguli non rectanguli cognitis cum angulo alteri eorum opposito, si qua lege datum angulum respiciens perpendicularis cadat exploratum fuerit, reliquum latus reliquiq; anguli non latebunt.



Sit triangulus a b g non rectangulus, duo latera a b & a g nota habẽs, cũ angulo b uni scilicet eorum opposito, sitq; certũ quonam pacto cadat perpendicularis à cõmuni termino datorum laterũ ad basim, uidelicet an intra an extra triangulũ, quæ sit a d. Dico q & latus b & duo anguli a & g noti ueniet. Certi enim principio simus perpen-

dicula-

dicularem a d cadere intra triangulum. habebit itaq; triangulus a d rectangulus latus a b cognitum cum angulo a b d, quare per huius duo eius latera a d & d b nota uenient cum angulo b a d. Triangulus demũ a g d duo latera a g quidem per hypothesim, a d autem per argumentationẽ habebit cognita, & ideo per huius & latus eius g d & utrunq; duorũ angulorũ a g d & g a d innotescet. Quemadmodũ autem ex duobus arcubus b d & d g seorsum notis arcus b g notus resultat, ita & duo anguli b a d & d a g collecti angulũ totũ b a g reddent cognitum. Quod si perpendicularis extra triangulum ceciderit, syllogismũ repetemus, nihil prorsus immutando, nisi q arcũ d g ex arcu d b minuamus, ut notum relinquatur latus b g trianguli propositi. angulũ deniq; g a d ex angulo b a d, & angulum a g d ex duobus rectis demamus, relinquentur enim duo anguli b a g & a g b noti, quod uolebamus attingere.



XXXI.

Si quis triangulus nõ rectangulus duos habuerit angulos cũ latere eos sustinente datos, reliquũ angulũ & reliqua latera cognitũ iri.



Habeat triangulus a b g nõ rectangulus notos duos angulos a & b, latusq; ipsis subiacens a b cognitum. Dico q & angulus a g b, & duo latera a g & g b innotescent. Descendat enim a uertice alterius datorũ angulorũ perpendicularis uersus latus nõ datum, subtendens reliquum angulum cognitũ, & sit uerbi gratia a d, quæ cadatne intra an extra triangulum nondum sciendi est potestas. id enim nõ statim nostrã cõsequitur hypothesim. Verum paulo longius profecti hoc explorabimus. Ex angulo igitur a b d cognito, & latere a b trianguli rectanguli a b d per huius & angulus b a d & utrunq; laterum a d & d b cognitionẽ sortientur. Si itaq; angulus b a d syllogismo cognitus minorem se offerat angulo b a g per hypothesim dato, certum est perpendicularẽ intra triangulum cecidisse. angulusq; b a d ex angulo b a g sublatus relinquet angulũ g a d notum. Triangulus ergo g a d rectangulus, cui & arcum a d & angulum g a d notos declarauimus, ductu huius, angulum a g d, qui & triangulo a b g terminis habetur, cum utroq; laterũ a g & g d in lucẽ depromet. Duo autem arcus b d & d g syllogismo cogniti si coadunentur totum arcũ b g datum accipiemus. Si uero angulus b a d ex argumentatione repertus maior occurrat angulo b a g quẽ hypothesis tradidit, perspicuum erit perpendicularẽ a d extra triangulũ cecidisse. Processuq; superiori capitã attingemus metam, nihil immutando nisi q arcum g d, quẽ nuperrime arcui d b adiecimus, nunc ex eo rejciamus, arcus reliqui g d cognoscendi gratia. Sed & angulum a g d duobus rectis subtrahendo relictum metiemur arcum b g, quæ censebã explananda. Nõ poterat autem perpendicularis a d alteri duorũ sibi conterminalium laterum coincidere, hypothesi id prohibenti. sic enim alter duorum angulorum b g & g rectus euenisset, quem tamen hypothesis non rectum administrabat.

XXXII.

Duobus angulis trianguli nõ rectanguli cognitis cum latere alterũ eorũ subtendẽte, reliquũ angulũ reliquaq; latera inuestigare.

Dati

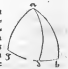


Sint duo anguli a b g & a g b trianguli a b g non rectanguli cum latere, uerbi gratia, a b, alterum eoꝝ scilicet angulũ g subtendente. Dico ꝙ & anguli a & utriusqꝫ lateꝝ a g & g b noticiam consequemur. Descendat enĩ ex uertice anguli a non dati, perpendicularis a d uersus latus, quod duos sustentat datos angulos, quæ cadat ne intra an extra triangulũ a b g duo anguli b & g cogniti huius manuducente declarabunt. Cadat prius intra. Triangulus ergo a b d rectangulus, cum & latus a b datum habeat, & angulũ a b d non rectum, per huius & anguli sui b a d & duoꝝ arcuũ a d & d b noticiam afferet, per eandem deniqꝫ huius latere a d & angulo a g d notis existentibus, & angulus g a d, & duo latera a g & g d innotescent. est autem & a g commune triangulo proposito, latus demũ b g ex duobus arcubus b d & d g singulatim notis, quemadmodũ angulus b a g ex duobus angulis b a d & d a g inuentis conflabitur. Quòd si perpendicularis extra triangulũ ceciderit, non aliter ratiocinabimur, uerũ angulum d a g, quem prius addidimus angulo b a d, nunc ex eo minuemus, ut relinquatur angulus b a g cognitus. similiter arcus g d ex arcu d b demptus, relinquet latus b g trianguli nostri cognitum, anguloqꝫ tandem a g d ex duobus rectis sublato, manebit anguli propositi cognitio, planum ergo reddidimus quicquid præsens pollicebatur theorema.



XXXIII.

Datis tribus angulis trianguli sphæralis non rectanguli, tria eius latera mensurare.



Sit triangulus huiusmodi a b g tres notos habens angulos non rectos. Dico ꝙ tria eius latera fient cognita. Ex uertice enim anguli cuiusuis uerbi gratia a uersus arcũ sibi oppositum procedat perpendicularis a d, quæ cadat ne intra an extra triangulũ huius manuducente callebimus, utroqꝫ angulorꝫ b & g noto per hypothesim existente, neutri enim duoꝝ lateꝝ a b & a g coincidet, sic enĩ alter angulorꝫ b & g rectus esset, quod interdixit hypothesis. Cadat ergo prius intra triangulũ, erit itaqꝫ per huius proportio sinus anguli b a d ad sinum anguli d a g, sicut sinus complementi anguli a b g ad sinum complementi anguli a g b. proportio autem sinus complementi anguli a b g ad sinum complementi anguli a g b nota est, ppter utrũqꝫ angulorꝫ b & g cognitũ, quare & proportionem sinus anguli b a d ad sinũ anguli d a g datam non inficiaberis. cumqꝫ totum angulum b a g notum tradiderit hypothesis, erit & per huius uterqꝫ angulorum apud a particulariũ non ignotus. Triangulus igitur b a d rectangulus omnes angulos suos habens cognitos, argumento huius duo latera sua a b & b d cognitioni nostræ subijciet, non aliter trianguli a g d rectanguli, tres angulos habentis datos, duo latera a g & g d metiemur. sic duo latera a b & a g trianguli propositi gemino didicimus processũ, duobus autem arcubus b d & d g congre

gatis(nam eos singulatim dimensi sumus)resultabit tertium latus b g trianguli a b g cognitum. Si uero perpendicularis trianguli egressa fuerit, erit ex præallegata huius proportio sinus anguli b a d ad sinū anguli g a d nota, quoniā proportio sinus complementi anguli a b g ad sinum complementi anguli a g b data est. cumq; nota sit differentia duorum angulorū b a d & g a d, uidelicet angulus b a g, erit per huius uterq; angulorū b a d & g a d cognitus. Triangulus ergo a b d rectangulus omnes angulos suos habet notos; angulū enim a b d notum relinquit angulus a b g, quem dedit hypothesis, posteaq; ex duobus rectis auferetur, quare per huius latus suū a b, quod & triangulo a b g commune est notum habebitur cum arcu b d. Non aliter ad noticiam duorū laterū a g & g d trianguli a g d rectanguli tres cognitos habentis angulos perueniemus, duo itaq; trianguli propositi latera a b & a g nota reddidimus, dempto autem arcu b d ex arcu d g quos geminus elicuit syllogismus tertij lateris b g noticiam consequemur, quæ decreuimus promulgare. His autem postremis theorematibus tenorem operationis numerosq; exemplares subiungere non erat consilium, satis enī res huiusmodi apud superiores conclusiones lucubrauimus, quas si memoria tua perdiderit censeo repetendas.

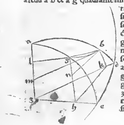


Trianguli a b g tria latera sint data, fiant a & g poli circulorū e k & d z, intelligaturq; paralellus h k super polo g descriptus secundū quantitatem arcus g b, quo facto erit opus omnino simile ei, ubi ex altitudine solis data quæritur distantia eius à meridie. sic habebis quatuor modos demonstrandi problema de tribus datis lateribus trianguli sphæralis.

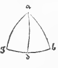
XXXIIII.

Cuiuslibet trianguli tria latera nota habentis, tres angulos reddere cognitos.

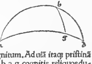
Sit triangulus a b g, cuius tria latera nota sint a b, a g & b g. Dico q; tres eius anguli noti habebūtur. Libeat primo inuenire angulū b a g. Si igitur uterq; arcuū a b & a g quadrante minor extiterit, protendatur uterq; ad partem lateris b g, donec fiant duo quadrantes a d & a e, & super polum a secundū cordam quadrātis a d describatur circulus, quem constat transire per punctum e, qui sit d e, arcus itaq; d e quantitatem anguli b a g quem quærimus determinabit, qui ut notus emergat, procedant à centro sphæræ z tres semidiametri ad tria puncta a, d, & e, quæ sint z a, z d & z e. à punctis autem b & d cordam b g terminantibus, binæ ducantur perpendiculares g h quidem & b k ad duas semidiametros z e & z d, duæ uero reliquæ g l & b m ad semidiametrū z a, quas quidem perpendiculares constat esse sinus arcuū, à quorū terminis egrediūtur, duoq; tandem pun



dem puncta h & k copulẽtur per lineam h k. Si igitur duo arcus a b & a g æquales fuerint, erunt duæ lineæ g l & b m æquales & conterminales, itemq; linea g h lineæ b k æqualis quidem propter arcus b d & g e æquales, æquedistans autem per diffinitionem superficiei ad superficiem erectæ & quartã undecimi, unde, & per primi duæ lineæ rectæ b g & k h æquales habentur. est autem g b nota scilicet corda arcus g b dati, quare & linea b k nota fiet. Item duæ superficies l h & m k sunt æquedistantiũ laterũ, quare per primi g l nota æqualis erit h 3 & b m cognita ipsi k 3. triangulus itaq; h 3 k planus rectilineus tria latera habens cognita per primi huius angulũ h 3 k manifestabit, cuius quantitatem determinat arcus d e, & ideo arcus d e diffiniens quantitatem anguli b a g notus concluditur. habet igitur triangulus sphæralis a b g duo latera b a & a g cognita cum angulo b a g, unde & per huius reliqui sui anguli non latebunt. Aliter tamen & facilius procedere poterimus, si duo arcus a b & a g æquales fuerint, hoc pacto, ex a puncto descendet perpendicularis arcus a d, qui necessario satis continuatus secabit latus b g ipsius trianguli, quod fiat in puncto d. eritq; b d æqualis g d per , quare cũ totus arcus b g sit notus, erit b d datus, per autẽ huius sinus cõplementi b a ad sinum cõplementi a d se habet, sicut sinus cõplementi b d ad sinũ totũ. unde a d notus erit.

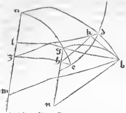


Hinc quoq; angulus a b d, & ei æqualis a g b. item tandẽ angulus b a g &c. Si autẽ alter duoꝝ arcuũ b a & a g reliquo maiorem se offerat, uterq; tñ minor quadrante, sit uerbi gratia arcus a b maior arcu a g, quãobrem alternatim erit arcus g e maior arcu b d, repetitaq; figuratione pristina erit linea g h longior linea b k, abscindatur ergo ex ea portio h n æqualis lineæ b k, ducta linea b n, quã ut supra oportet esse æqualẽ lineæ h k, similiter tam g l lineæ h 3 æqualis erit, q̃ b m ipsi k 3. erit autẽ angulus b n g rectus, cumq; duo latera b g & g n trianguli g b n rectanguli sint cognita. est enĩ b g corda arcus b g per hypothesim noti. g n autẽ differentia duoꝝ sinuum b k & g h notoꝝ, erit & latus eius b n per primi huius notum. et ideo h k nota declarabitur. Duas autẽ lineas h 3 & 3 k quẽadmodum ante hac notas declarabimus. tria igitur latera trianguli h 3 k nota sunt. unde angulũ h 3 k & reliqua ut nuperrime dimetiemur.



Quòd si uterq; arcuum a b & a g quadrante maior extiterit, protendantur ipsi donec in puncto s coincidẽt, quo fit ut duo arcus b s & s g noti reddantur. Est enim per primi huius uterq; arcuum a b s & a g s semicircumferentia nota. Triangulus ergo b s g trium notoꝝ laterum ex iã dictis angulum b s g æqualẽ angulo b a g sortietur cognitum. Ad uiã itaq; pristinã perducti, ex duobus lateribus a b & a g cũ angulo b a g cognitis, reliquos duos angulos huius dirigente inuestigabimus. Postremo sit alter duoꝝ arcuum a b & a g maior quarta circumferentiæ, reliquus uero minor. & sit uerbi gratia a b quadrante maior, a g autẽ minor eo, resumptaq; figuratione nihil in ea uariabimus, nisi q̃ lineam g h continuemus ad partẽ puncti h, donec h n fiet æqualis sinui b k arcus b d. similiter a 3 semidiameter prolongetur, ita ut b m ipsi perpendiculariter insidere possit. quibus ita dispositis argumẽtabimur hoc pacto Corda b g nota est propter arcum suum notũ. linea g cõplectitur sinum arcus g e noti, & lineã h n æqualẽ b k sinui arcus b d noti, tota ergo g n nota est, an

 gulus

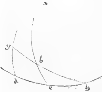


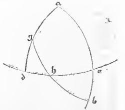
gulus autem b n g rectus est, nã superficies h n b k æquedistantibus continetur lineis, & angulus eius apud k rectus quare per primi huius latus n b trianguli b n g rectanguli notũ erit, cui æqualis est linea h k. trianguli itaq; plani h 3 k tribus lateribus cognitis angulum h 3 k & reliqua quẽadmodum antehac mensurabimus. ¶ Operationi autem parē loci dabimus, nihil eñ docebimus nisi quo pacto reperiantur tria latera triãguli plani, cuius unus angulus in centro sphæræ quiescẽs respondet angulo sphærali quæsito, qualis in figura est triangulus h 3 k. reliqua enim in locis suis superioribus satis explanasse uidemur. Siue igitur duo arcus a b & a g æquales fuerint, siue non, sinus eorũ accipiemus pro duobus lateribus continentibus angulum trianguli plani in centro sphæræ quiescentem, qui respondet angulo sphærali quæsito. pro tertio autem latere trianguli plani cordam arcus tertij constituemus, si æquales occurrant duo arcus angulũ quæsitum continentes, qui si fuerint inæquales, uterq; tñ aut minor quarta, aut maior ea sinus cõplemẽtorũ arcuũ, qui angulum quæsitũ ambiũt, eliciere, & differentiam eorũ in se multiplicatã ex quadrato cordæ arcus tertij minuas, relictiq; radicem quadratã pro latere tertio trianguli plani ponas. Qđ si alter eorũ maior quadrante, reliquus autem minor eo fuerit, sinus complementorũ huiusmodi collige, & summã eorũ in se ductã, ex quadrato cordæ arcus tertij subtrahas, relicti enim radix quadrata lateri tertio trianguli plani adnumerabitur. In exemplo. Sit uterq; arcuũ a b & a g 20. gr. & arcus b g 36. sinus 20. graduũ est 20521. tantumq; numerabo utrunq; laterũ k 3 & 3 h. Sinus 36. gr. est 35267. tantũ est latus h k, similiter faciam, si uterq; arcuũ a b & a g occurrat 160. gr. & arcus b g 36. redibunt enim pristini numeri. Sed dabit mihi quispiam latus a b 35. gr. latus a g 16. & latus b g 46. sinus 25. gr. est 25357. quem dabo lateri k 3. sinus 16. est 16538. lateri 3 h adnumerandus corda b g 46888. Sinus complementi 16. graduũ est 57676. Sinus complementi 25. gra. est 54378. quem minuo ex 57676. manẽt 3298. hæc in se faciunt 10876804. quæ sublata ex quadrato cordæ b g, scilicet 2198484544. manẽt 2187607740. quorum radicem quadtatam 46772. constituo pro linea h k. Tandem ponatur latus a b 130. gra. latus a g 75. & latus b g 65. Sinus 130. gra. est 45963. pro latere k 3. Sinus 75. gr. 57956. numerus lateris h 3, & corda 65. gr. est 64476. sinus complementi 130. gr. est 38567. sinus complementi arcus a g est 15529. quem addo ad 38567. colliguntur 54096. hæc in se faciunt 2926377216. quæ subtraho ex quadrato cordæ b g, quod est 4157154576. manẽt 1230777360. huius radicem quadratã 35082. lateri h k deputabo. Perducti igitur ad hypothesim primi huius, quæ nobis angulũ h 3 k cognitũ faciet, unde & angulus d e numerabitur, quod non erit ambiguũ, si ea quæ in processu primi huius cõmemorauimus, memoriæ mandasti. arcus autem d e quantitatem anguli b a g determinat, unde & b a g & reliqui anguli nõ erunt ignoti. Poterimus aũt alio tramite idem attingere. Nam ꝓpositus triangulus a b g habeat duo latera a b & a g inæqualia, utrũq; tamen minus quadrante, & libeat inuenire quantitatem anguli b a g, super puncto a facto polo describatur circulus magnus in sphæra d h, cuius circumferen-

tiæ oc

tiæ occurrat arcus g b prolongatus in puncto h. duo etiam arcus a b & a g extendantur ad puncta e & d, erit uterq; arcuū a e & a d quadrans orthogonaliter erectus ad arcū d h. per autem huius proportio sinus arcus g d ad sinū arcus b e est tanq; sinus g h ad sinū arcus b h. est autem uterq; duorū arcuū g d & b e notus, propter sua complementa a g & a b per hypothesim nota. proportio igitur sinus g h ad sinū b h nota habebitur, cūq; differentia duorū arcuū g h & b h sit nota, scilicet arcus g b, erit per huius uterq; eorū arcuū nota. hinc ex arcu b h & b e cognitis per huius, ꝑpter angulū e rectum, complementū arcus e h & ideo ipse arcus e h innotescet. Similiter ex duobus arcubus g d & g h, arcus d h cognoscetur, quare differentia duorū arcuū d h & e h scilicet arcus d e non ignorabitur, ipse autem determinat quātitatem anguli b a g, quare angulus ille notus erit, hinc & reliqui ut antehac noti fient anguli. Si uero alter quidem duorū arcuū a b & a g maior quadrante fuerit, alter aūt minor eo, sit a b maior quadrāte, descriptoq; ut prius circulo magno super a polo, circumferentia eius secabit arcum g b, quod fiat in puncto, secabit etiā arcū b g in puncto, qui sit h, arcus aūt a g continuatus, occurrat ei in puncto d, erit autem uterq; duorū arcuum e b & g d notus: sunt enim cōplementa arcuū datorū, est autē ꝑportio sinus b e ad sinum g d nota, sicut proportio sinus b h ad sinū h d per huius. sic proportio sinus b h ad sinū h g nota habebitur: cumq; totus arcus b g datus sit per hypothesim, erit per huius uterq; arcuū b h & h g cognitus. ex duobus aūt arcubus b h & b e cognitis, & propter angulū e rectum per huius innotescet arcus e h. similiter duo arcus h g & g d propter angulū d rectum notificabunt arcū d h, sic totus arcus d e determinans quantitatem anguli b a g non latebit, unde angulus b a g cum reliquis trianguli propositi angulus notus proclamabit. Si uero uterq; arcuum a b & a g quadrantem superauerit, producantur ipsi donec concurrant, eritq; angulus apud concursum eorum æqualis ipsi angulo a, fietq; nouus triangulus super basi b g, cuius duo latera minora quadrante nota erunt, unde reliqua ut superius absoluentur. Operationis autem tenorem prætereo, nam ab operationibus huius atq; pendere dinoscitur.

Quarti libri Triangulorum Finis.

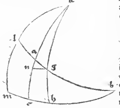




LIBER QVINTVS TRIANGVLORVM.

I.

Si fuerint duo trianguli rectanguli, qui duos angulos acutos & æquales habeant, latera autem rectos subtendentia angulos inæqualia, erit proportio sinus differentiæ eorum laterum ad sinum differentiæ duorum laterum rectis atq; acutis æqualibus substratorum, tanq́; proportio eius, quod sub sinibus complementorum acutis angulis subtensorum laterum continetur, ad id, quod sub sinu toto & sinu cōplementi anguli acuti.





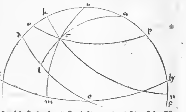
Triangulos huiusmodi ex arcubus circulorum magnorũ unius sphæræ, aut duarum æqualium concludi subauditur, de reliquis enim in præsentiarum nihil differimus. Sint tales duo trianguli a b c & d e f, duos quidem angulos a g b & d f e rectos; duos autem a b c & d e f acutos æquales habẽtes: sitq́; latus a b trianguli a b c longius latere d e trianguli d e f, quæ res arguet etiam latus b c unius trianguli longius esse latere e f alterius, si tertium huius satis tenes. Dico itaq;, ꝙ sinus rectus differentiæ duorũ laterum a b & d e ad sinum differentiæ duorum laterũ b c & e f proportionem habet, quam id, quod sub sinu toto & sinu complementi anguli a b c, siue d e f ad id, quod sub sinubus complementorũ duorũ arcuum a c & d f continetur. Quod ut facilius demonstretur, scindo ex a b arcũ g b æqualem arcui d e, & ex b c arcum b h æqualem arcui e f, continuatisq́; duobus punctis g & h per arcũ g h, constabit per   secundi huius angulũ g h b esse rectum: & ideo per   secundi huius duo circuli, quorũ sunt arcus a c & g h ꝑ polos circuli b c transibunt: duo itaq; arcus a c & g h continuati paulo superius concurrant in puncto k, qui necessario polus circuli b c habebitur, & uterq; arcuum k c & k h quadrans circumferentiæ magnæ pronunciabitur, intelligatur deniq; circulus magnus transiens per polum k, & polum circuli a b, cuius arcus k m occurrat duobus a b & b c prolongatis, quoad satis erit uersus sinistrã, huic quidem in puncto l, isti autem in puncto m: occurret autem orthogonaliter   secundi huius arguente, eritq́; per   &   eiusdem unusquisq; trium arcuũ k m, b l & b m quarta circumferentiæ magnæ: unde & arcus l m quantitatem anguli a b c determinabit, cuius complementũ est k l: nemo autem ignorat arcum a g esse differentiã duorũ arcuũ a b & d e. item c h excessum arcus c b super f e, demittatur itaq; ex puncto g perpendicularis arcus g n ad quadrantem k c, proportio igitur sinus a g ad sinum c h componitur ex duabus, proportione scilicet

sinus

sinus a g ad sinum g n, & ex proportione sinus g n ad sinũ c h. est autem per tertij huius sinus a g ad sinum g n, sicut sinus a k ad sinum k l. sinus præterea g n ad sinum c h ex eodem loco est, ut sinus g k ad sinũ k h. proportio igitur sinus a g ad sinum c h componitur ex duabus scilicet proportione sinus a k ad sinum k l, & proportione sinus g k ad sinũ totum, sed ex illis componitur etiã per sexti elementorum, quod sub sinibus a k & g k continetur ad id, quod sub sinu toto & sinu k l scilicet complementi anguli a b c continetur, uerum igitur enunciabat theorema præsens.

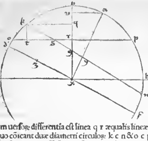
11.

In omni triangulo sphærali ex arcubus circulorum magnorum constante, proportio sinus uersi anguli cuiuslibet ad differentiam duorũ sinuum uersorum, quorum unus est lateris eum angulum subtendentis, alius uero differentiæ duorum arcuum ipsi angulo circumiacentiũ est tanquam proportio quadrati sinus recti totius ad id, quod sub sinibus arcuũ dicto angulo circũpositorum continetur rectangulum.



Sit huiusmodi triangulus a b g, duo latera habens inæqualia a c maius a b, & utrunq; eorum minus quadrante, super punctis a & b factis polis describant duo circuli magni, quorum circumferentiæ se secent in pũcto e: prolongeturq; arcus a b utrinq; donec occurret circulo sup a descripto in pũctis d & f, circulo aũt sup b lineato in pũctis g & h, cõstat arcũ g d æqualẽ esse arcui a b; utrũq; aũt arcuũ e d & e g esse quadrantẽ circũferentiæ magnæ. cõtinuenẽ deniq; duo arcus a c & b c, donec uterq; eorum quarta circũferentiæ fiat: hic quidem occurrens arcui d e in l puncto, ille aũt arcui g e in pũcto m; factisq; iterum punctis a & b polis, super a quidẽ secundũ quantitatem corde a c describatẽ circulus minor in sphera k n: super b aũt secundũ distantiã b circulus minor o p, erit itaq; arcus b k differentia duorum arcuũ a b & a c, & arcus b o æqualis arcui b c, arcus aũt d l quantitatẽ anguli b a c determinabit. Dico igitẽ, q proportio sinus uersi d l ad differentiã duorum sinuũ uersorũ, quos habẽt arcus b k & b c est ut quadrati sinus recti totius ad id, quod continẽ sub duobus sinubus rectis arcuũ a b & a c. Qđ ut apertius demonstreẽ, altera figuratio assumenda est, in qua sit circulus g b h, quemadmodũ in prima sup centro x, quod & centrũ sphæræ habebiẽ, sitq; cõis sectio circulorum g b h & g e h diameter g h, quã in prima figura lineare nõ decuit confusionis uitandæ gratia, sed & cõis sectio circulorum g b h & d e f sit linea d f. item duo circuli g b h & k c n secent se in linea k n, duo demũ circuli g b h & o c p in linea recta o p cõuincẽt, deinde educanẽ duæ semidiametri sphæræ x a quidẽ secans lineã k n in puncto y, x b aũt secãs o p in puncto r, constat aũt per huius k n esse diametrũ circuli k c n, & o p lineã esse diametrũ circuli o c p, q circulus magnus g b h per polos utrinsq; eo

rum in



rũ incedat, punctusq; y erit centrũ circuli k c n, & punctus r centrũ circuli o c p, rursus ex puncto k duæ ꝑueniãt ꝑpendiculares, una quidẽ k t ad lineã o p, alia aũt k 9 ad lineã b x. punctus item a sit caput ꝑpendicularis a u supra lineã b x descendentis. erit itaq; linea a u sinus rectus arcus a b: b q aũt sinus uersus arcus b k, & b r sinus uersus arcus b o siue b c, horũ sinuum uersoꝝ differentia est linea q r æqualis lineæ k t. signato iterũ puncto s, in quo cõicant duæ diametri circuloꝝ k c n & o c p scilicet lineæ k n & o p, sciendũ est lineã k s esse sinũ uersum arcus k c primæ figuræ, cũ enĩ uterq; circuloꝝ k c n & o p c orthogonaliter sit erectus supra circulũ g b h, per polos eoꝝ incedentẽ, ut docet   huius, erit eorũ sectio cõis, quæ ꝑtransit punctũ s ex   undecimi elementoꝝ orthogonaliter erecta supra circulũ g b h, & ideo per conuersionẽ diffinitionis lineæ ꝑpendiculariter erectæ supra superficiẽ, hæc cõis sectio lineæ k n, diametro scilicet circuli k c n orthogonaliter incidit, & ideo hãc sectionẽ cõem diameter k n diuidet per medium, eritq; medietas eius sinus rectus arcus k c, & ideo k s sinus uersus eiusdẽ. cũq; d f recta sit diameter circuli d e f. sumat̃ ex ea d z linea sinus scilicet uersus ipsius arcus d l, ad quã se habebit k s sicut semidiameter circuli k c n, ꝙ est k y ad semidiametrũ circuli d e f scilicet d x: sunt enĩ duo arcus k c & d l similes per   huius, ꝓpter duos arcus a d & a l à polo duorũ circuloꝝ k c n & d e f descendẽtes, & dictos arcus includẽtes. Iã ad portũ accedemus, ubi prius duos triãgulos k t s & a u x æquiãgulos ostẽdemus hoc pacto: duo anguli t k s & r 9 s, ideoq; x 9 y sunt æquales ꝓpter æquedistantiã linearũ k t & r 9, quare cũ uterq; anguloꝝ k t z & x y 9 sit rectus, erit reliquus angulus k s t æqualis reliquo y x 9, siue a x u. angulus aũt a u x rectus disponebatur, sunt itaq; duo trianguli k t s & a u x æquianguli, & ideo per quartã sexti & ꝑmutatim ꝓportio x a ad a u sicut s k ad k t. proportio aũt d z scilicet sinus uersi anguli b a c ad lineã k t scilicet differentiã duoꝝ sinuũ uersorũ supra memoratorum componit̃ ex duabus scilicet ꝓportione sinus d z ad k s, & ex proportione k s ad k t; erat aũt d z ad k s sicut d x scilicet sinus totus ad lineã k y, quæ est sinus rectus arcus a k siue a c, & ꝓportio k s ad k t sicut a x sinus recti totius ad lineã a u, quæ est sinus rectus arcus a b. ꝓportio igit̃ sinus uersi arcus d l siue anguli b a c, ad differentiã sinuũ uersoꝝ supradictorũ cõponit̃ ex duabus, ex proportione scilicet sinus recti totius ad sinum rectum arcus a c, & ex ꝓportione sinus recti totius ad sinũ rectum arcus a b. ex eisdẽ autẽ duabus proportiõibus cõponit̃ etiã ꝓportio quadrati sinus recti totius ad id, quod cõtinetur sub sinibus rectis duorũ arcuũ a b & a c. proportio igit̃ sinus uersi anguli b a c ad differentiã duorũ sinuũ uersorum, quos habent duo arcus b o & b k est, ut ꝓportio quadrati sinus recti totius ad id, quod continet̃ sub duobus sinibus rectis duoꝝ arcuũ a b & a c, quod erat demonstrandũ. Hoc tñ non ignorare uideris, ꝙ duo sinus uersi duorum arcuũ b k & b o eam habent differentiã, quã duo sinus recti cõplementorũ

suoꝝ

ſuorum;unde ſi in quopiā negocio tuo opus fuerit hoc theoremate, poteris ſupradictā differentiam inuenire, ſubtrahendo ſinum rectū cōplemēti alterius duorum arcuū b k & b o ex ſinu recto cōplementi reliqui eorum. Aſſumpſimus autē duos arcus angulū, de quo ſermo habitus eſt, minores quadrante, quo demonſtratio noſtra planior putaret̄; nam ſi fuerit uterq; eorum maior quadrāte, intelligant prolongari, donēc concurrant angulum alium æqualem priori comprehendendo: fiet itaq; nouus triangulus ſupra arcum tertium, cuius duo latera quadrante minora habebuntur. Quod ſi alter eorum minor quadrante, alter uero maior eo præbeatur, tametſi figurationem parumper mutari oporteat, una tamen eadem ſyllogiſmi forma ueritatem theorematis concludet; hoc uno attento, quod arcus quilibet cū eo, qui ſibi ex ſemicirculo deficit, eundem ſinum rectum accipit. Satis ergo certitudinem propoſitionis noſtræ oſtendiſſe uidemur.

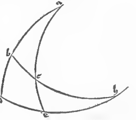
III.

Datis tribus lateribus trianguli ſphæralis ex arcubus circulorum magnorum conſtantis, omnes angulos eius dimetiri.

Etſi propoſitum illud exequi liceat per huius, tamen quo iucundior eſſet ueritatis contemplatio, dum per plures ac diuerſas uias ad eandem metam peruenitur, libuit præcedens theorema propoſito noſtro ſuppeditare. Talis ergo ſit triangulus a b g, ex arcubus circulorum magnorum conſtans, propoſitum eſt inuenire angulum eius b a c, aut alium quemlibet, ſubijciamus tria latera eius inæqualia, nam ſi duo eius quæcunq; latera fuerint æqualia, procedendum erit iuxta monita huius. Cum itaq; ex præcedenti ſit proportio quadrati ſinus recti totius ad id, quod ſub ſinibus rectis duorum arcuum a b & a c continetur, tanq; proportio ſinus uerſi anguli b a c quæſiti differentiam duorum ſinuum uerſorū, quorum unus eſt ipſius arcus b c, alter uero differentiæ duorum arcuum a b & a c, & tres harum quantitatum ſunt notæ propter hypotheſim, erit & quarta cognita ſcilicet ſinus uerſus anguli b a c, hinc arcus ſuus, qui determinat quantitatem anguli b a c, & ideo angulus ipſe menſuratus offeretur, pro reliquis autem duobus angulis cognoſcendis nihil noui præcipimus, quoniam ex angulo b a c iam cognito cum latere b c eum reſpiciente, reliquisq; lateribus notis argumento huius, quod reliquum eſt enitemur.

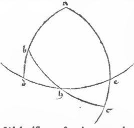
IIII.

Quod præcedens tradidit alio ſyllogiſmo concludere.



Habeat enī propoſitus triangulus a b c, duo latera a b & a c inæqualia, quadrante diuiſim minora, libeatq; inuenire quantitatem anguli b a c, ſuper puncto a facto polo, deſcribatur circulus magnus in ſphæra d h, cuius circumferentiæ occurrat arcus b c prolōgatus in puncto h: duo inſuper arcus a b & a c extendātur uſq; ad arcum d h, cui incidant in pūctis e & d, erit itaq; uterq; arcuum a e & a d quadrans orthogonaliter erectus ſupra arcū d h, duo au

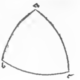
tem arcus b d & c e noti erunt, sunt etenim complementa duorum arcuum a b & a c per hypothesim notorum, sed proportio sinus recti b d ad sinum rectum c e est per huius, ut sinus recti arcus b h ad sinum rectum h c. proportio igitur sinus recti b h ad sinum rectum h c nota est, cumque differentia duorum arcuum b h & h c nota sit, scilicet arcus b c, erit per huius uterque eorum cognitus, deinde ex duobus arcubus h c & c e notis, & angulo e recto per huius cognoscetur arcus h e, similiter duo arcus h b & b d noti cum angulo d recto notificabunt arcum h d: arcus igitur h e demptus ex arcu h d, relinquet arcum d e cognitum, qui determinat angulum a b c, unde & ille notus habebitur: reliquos autem duos angulos latera sibi opposita per huius notos elicient. Si uero alter duorum arcuum a b & c maior quadrante fuerit, reliquus uero minor eo, sit a c maior, descriptoque ut prius circulo magno super a polo, circumferentia eius secabit duos arcus a c & b c: hunc ergo secet in e, illum uero in puncto h, prolongeturque arcus a b, donec occurret dictæ circumferentiæ in puncto d, erit iterum uterque arcuum b d & c e notus, quoniã sunt complementa duorum arcuum a b & a c datorum, est autem per huius proportio sinus recti b d ad sinum rectum c e, sicut sinus recti b h ad sinum rectum h c propter duos angulos d & e rectos, sic ergo proportio sinus recti b h ad sinum rectum h c nota habebitur. cumque totus arcus b c sit notus per hypothesim, erit per huius uterque arcuum b h & h c cognitus: ex duobus autem autem arcubus h b & b d cognitis cum angulo d recto cognoscetur arcus d h per huius: similiter duo arcus h c & c e cum angulo e recto, arcum h e notum suscitabunt: duo tandem arcus d h & h e collecti, totũ arcum d e notificabunt, qui determinat quantitatem anguli b a c, unde & ipse notus concludetur, cætera ut antehac perficientur. Quòd si uterque arcuum a b & a c quadrantem superauerit, intelligantur prolongati donec concurrent, facientes angulum nouum æqualem ipsi angulo a quæsito, fiet itaque alius triangulus supra arcum b c, cuius duo latera minora quadrante nota erunt. per modum ergo prædictum angulus duobus illis lateribus contentus innotescet, qui est æqualis angulo a, unde & ipse angulus a notus enunciabitur. Est præterea alius modus inueniendi angulum trianguli sphæralis quemcunque uoles ex tribus lateribus datis, intelligantur enim duci tres cordæ ipsorum arcuum datorũ, tres quoque semidiametri sphæræ egrediantur ad tria puncta angularia ipsius trianguli: habebis igitur pyramidem supra basim trilateram, cuius sex lineæ notæ sunt, poteris igitur aliunde discere inclinationem unius superficiei lateralis supra aliam, superficiem inquam quæ clauditur duabus semidiametris sphæræ, & una trium cordarum dictarum: quantitas enim huius inclinationis angulum duorum arcuum, quorum cordæ assumptæ sunt manifestabit. in hac autem inquisitione sinus recti arcuum datorum, ac sinus recti complementorum suorum maxime utiles erunt, ne tamen prolixus nimium uidear, post tres uias bonas iam absolutas, hanc quartam prætereundam



tetendam arbitratus sum, præsertim cum ex alijs scriptis meis planè colligi possit.

V.

Datis duobus angulis trianguli sphæralis cum aggregato duorum laterum eis oppositorum, utrunq; eorum secernere.



Triangulus a b c, duos angulos a b c & a c b notos habeat, congeriemq; duorum laterum a b & a c cognitam. Quærimus utrunq; eorum seorsum, quoniam per huius proportio sinus recti arcus a b ad sinum rectum a c est, ut sinus recti anguli a c b ad sinum rectum anguli a b c: illa autem nota est propter angulos datos, sinus ergo rectus a b ad sinum rectum a c proportionem habebit datam, cunq; aggregatum ex istis arcubus sit datum, erit per huius uterq; eorū separatim cognitus, quod erat inueniendum, pro reliquo autem latere, reliquoq; angulo cognoscendis huius repetendam censeo.

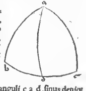
VI.

Datis duobus angulis trianguli sphæralis ex arcubus circulorum magnorum constantis, cum differentia laterum eis oppositorum, utrunq; eorum secernere.

Hæc ex quemadmodum præcedens ex huius pendere dinoscitur: erit enim proportio sinus recti unius quæsitorum arcuum ad sinum rectum alterius cognita, propter angulos datos ratiocinante huius: cunq; differentiam eorū præbuerit notam hypothesis, uterq; eorum proculdubio cognitus emerget.

VII.

Si ab angulo quolibet trianguli sphæralis ad latus sibi oppositum descendat, arcus circuli magni angulum à quo ducitur diuidēs per medium, sinus recti duorum arcuum angulo diuiso circumpositorum, & sinus recti portionum lateris diuisi eandem proportionem acceptabunt.



In triangulo tali a b c ducatur arcus a d ex puncto a diuidens angulum quidem b a c per æqualia, arcum autem b c in duas portiones b d & d c. Dico q; proportio sinus recti a b ad sinum rectum a c est, ut sinus recti b d ad sinum rectum d c. Erit enim per huius sinus rectus a b ad sinum rectum b d sicut sinus rectus anguli a d b ad sinum rectum anguli b a d, item proportio sinus recti a c ad sinum rectum c d sicut sinus recti anguli a d c ad sinum rectum anguli c a d: sinus autem anguli b a d æqualis est sinui recto anguli c a d, sinus denique anguli a d b æqualis, imò idem est sinui recto anguli a d c: hi enim duo anguli duobus rectis æquantur, quemadmodum enim duo arcus semicircumferentiæ cōiunctim æquales unum & eundem suscipiunt sinum rectum, ita & duo anguli duo

bus rectis coniunctim æquales in sinu recto communicare oportet, unam igitur habent proportionem sinus rectus a b ad sinum rectum b d, & sinus rectus a e ad sinum rectum c d: permutatis itaque terminis uerum enunciasse propositionem confiteberis.

VIII.

Si fuerint duo trianguli rectanguli, quorum angulus acutus unius datus fuerit æqualis angulo acuto alterius, differentia quoque laterum rectos subtendentium æqualis differentiæ duorum arcuum, qui rectis & acutis datis substernuntur, fueritque latus unum quodcunque alterius duorum triangulorum cognitum, reliqua omnia cum ipsa differentia prædicta innotescent.



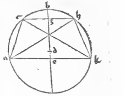


Sint duo trianguli tales a b c & d e g, duos rectos habentes a b c & d e g, duosque acutos datos a c b & d g e, sitque latus a c unius longius latere d g alterius. differentia autem duorum arcuum a c & d g æqualis differentiæ duorum arcuum b c & e g, quæ quis non sit nota: sit demum unus sex arcuum ex duobus triangulis datus. Dico quod omnes reliqui arcus innotescent. Sit arcus b c uerbi gratia datus, ex quo & duobus angulis b & c notis arguente, reliqui duo arcus eiusdem trianguli notificabuntur. est autem per huius proportio sinus differentiæ duorum arcuum a c & d g ad sinum differentiæ duorum arcuum b c & e g, quæ est proportio æqualitatis, sicut eius, quod sub sinibus complementorum arcuum a b & d e continetur ad id, quod sub sinu toto & sinu complementi anguli a c b siue d g e connnetur: hæc igitur duo sub prædictis sinibus contenta sunt æqualia: quod autem sub sinu toto & sinu complementi anguli a c b continetur, est cognitum, propter sinum totum & sinum complementi anguli a c b notos: quamobrem quod sub sinibus complementorum arcuum a b & d e continetur notũ erit, est autem complementum arcus a b notum propter ipsum arcum a b prius mensuratum: hinc sinus huius complementi, & ideo per huius sinus cõplementi arcus d e innotescent, quo demũ cognoscemus cõplementũ arcus d e, & inde ipsum arcum d e, qui tandem cum duobus angulis d e g & d g e intercedente huius reliqua latera trianguli sui manifestabit. hinc etiã differentia duorũ arcuum a c & d g, quæ ponebatur æqualis differentiæ duorum arcuum b c & e g nota pronunciabitur, quæ fuerunt demonstranda.

IX.

Data differentia duorum arcuum, si quod sub duobus eorum sinibus continetur, rectangulum fuerit datum, utriusque arcus attingere noticiam.

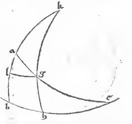
Duorum arcuum a b & b c differentia a c sit data, quodque sub sinu arcus a b qui sit a e, & sinu arcus b c, quem uides c 3 continetur, sit datum. Quærimus utrunque



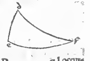
utrunq; arcuum a b & b c. Intelligo autem rectangulum prædictum esse datum respectu quadrati semidiametri circuli: continuatis itaq; duobus sinibus a e & c 3, donec in duobus punctis h & k circumferentiæ desinant, ducantur cordæ a c, a h, k c & k h. cum igitur quod sub a e & c 3 continetur datum sit, erit quod sub duplis earum continetur datum, hoc etenim ad illud quadruplum conuincitur ex sexti elementorũ, cui si addiderimus quadratum cordæ a c, id est, quod sub a c & h k æqualibus quidem propter æquedistantiam cordarum a k & c h: notis autem propter arcum a c ex hypothesi notum, colligetur quadratum cordæ a h cognitum: est nanq; a h diameter quadranguli a c h k circulo inscripti æqualis c k diametro eiusdem: quod autem sub duabus diametris huiusmodi quadranguli continetur, æquum est ei, quod sub binis lateribus eius oppositis concluditur: hinc corda a h & arcus eius a h innotescent, ex quo si dempseris arcum a c notum, relinquetur arcus c h cognitus cum eius dimidio c b, cui si addideris arcum a c notum, resultabit totus arcus a b cognitus, cuius obtentu hactenus cursum est.

X.

Si fuerint duo trianguli rectanguli, quorum angulus acutus unius æqualis angulo acuto alterius, duo autem latera rectos angulos subtendentia habuerint differentiam notam, itemq; duo latera rectis & acutis datis subiacentia differentiam cognitam habuerint, omnia eorum latera innotescent.



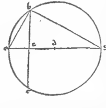
Sint duo trianguli a b c & d e f, duos angulos rectos a b c & d e f habentes, duosq; a c b & d f e acutos æquales & datos; latus autem a c unius uerbi gratia sit longius latere d f alterius, quorum differentia sit data, differentia quoq; duorum laterum b c & e f sit cognita. Dico q; omnia latera horum triangulorum nota uenient. Si enim duæ datæ differentiæ fuerint æquales, per huius propositum comparabimus. si uero inæquales offerantur, scindam ex a c arcum g c æqualem arcui d f, itemq; ex b c arcũ h c æqualem arcui e f, ductoq; arcu g h, constabit angulum g h c esse rectum, oportebit enim per huius duos triangulos d e f & g h c esse æquilateros & æquiangulos: continuẽtur deinde duo arcus b a & h g, donec concurrent in puncto k, qui per huius erit polus circuli b c, super quo secundum quantitatem k g describatur circulus minor in sphæra, cuius arcus



g l occurrat arcui b k in l. Quia autem per huius proportio sinus a g ad sinum b h est, ut eius quod sub sinibus arcuum a k & g k ad id, quod sub sinu toto & sinu complementi anguli a c b continetur, tres autem harum quantitatum notæ sunt, duos enim arcus a g & b h dedit hypothesis, quod autem sub sinu toto & sinu complementi anguli a c b continetur notum est, propter angulum a c b datum: quare quod sub sinibus duorum arcuum a k & g k continetur, notũ habebitur. est autem per huius quadratum sinus totius ad id, quod sub sinibus arcuum a k & g k continetur, tanq̃ sinus uersi anguli a k g, siue arcus b h eum determinantis ad differentiam duorum sinuum uersorum, quos habent duo arcus a g & a l; cumq; tres harum quantitatum sint notæ, ut patuit, erit & differentia dictorum sinuum uersorum cognita. cumq; arcus a g per huius sit maior arcu a l, & ipse notus est ꝑ hypothesim, erit eius sinus uersus cognitus, à quo si dempseris prædictam differentiam duorum sinuum uersorum, manebit sinus uersus arcus a l inuentus: hinc arcus a l non poterit latere, qui est differentia duorum arcuum a k & g k: quod autem sub sinibus a k & g k continetur, notum pridẽ concludebatur, & iam differentiam eorum arcuum notam reddidimus, quare ex præmissa uterq; eorum cognitus offeretur, hinc sua complementa, arcus uidelicet a b & g h innotescent: ex arcu deniq; g h duobusq; angulis g h c & g c h datis huius ratiocinante, uterq; arcuum g c & h c, qui sunt æquales duobus d e & d f cognoscetur, quibus si adiecerimus duos arcus a g & b h, ex hypothesi notos resultabunt duo arcus a b & a c cogniti: trina igitur latera propositorum triangulorum nota fecimus, quod erat proclamandum.

XI.

Sinu uerso alicuius arcus ad sinum rectum eiusdem proportionem habente notam, arcum ipsum innotescere.



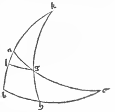
Sit in circulo a b g c diametrum a g babente, corda b c, quam diameter per medium secet in e, cõstabit itaq; a e esse sinum uersum arcus a b & b e sinum rectum eiusdem: det ergo quispiam nobis proportionem a e ad b e. Dico ꝙ arcus a b cognitus reddet. Ductis enim duabus cordis a b & b g, erunt per 30. tertij & 8. sexti elementorum duo trianguli partiales a b e & e b g sibi inuicem & toti triangulo a b g similes, & per corollarium eiusdem octauæ linea b e medio loco proportionalis inter g e & e a, cumq; proportio b e ad e a sit cognita, erat enim a e ad e b data, erit & g e ad e a data proportio, & coniunctim totius diametri g a ad sinum uersum a e proportio fiet, diametrum autem circuli ꝓpter arcus circumferentiæ metiendos notam supponimus, quare & sinus uersus a e notus habebitur, qui tandem arcum suum a b non sinet ignotum.

XII.

Si fuerint duo trianguli rectanguli, quorum angulus acutus unius fuerit æqualis angulo acuto alterius dato, differentia etiam laterum re

ctis an

ctis angulis oppositorum fuerit data, cum differentia laterum acutis angulis subtensorum, omnia latera triangulorum cognita reddere.

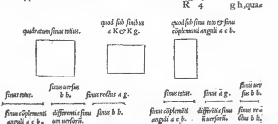


Resumpta figuratione huius datos, supponamus duos arcus a g & a l differentias uidelicet arcuum angulos datos subtendentium. Quærimus omnia latera duorum triangulorum hoc pacto: Proportio quadrati sinus totius ad id, quod sub sinu toto & sinu complementi anguli a c b continetur, per primam sexti est ut proportio sinus totius ad sinum complementi anguli a c b, sumpto sinu toto tanquam altitudine communi ambobus rectangulis: hæc autem componitur ex duabus proportionibus, scilicet proportiõe quadrati sinus totius ad id, quod sub sinibus a k & g k continetur, & proportione eius, quod sub sinibus a k & g k ad id, quod sub sinu toto & sinu complementi anguli a c b continetur: prima harum componentium per huius est, ut sinus uersi arcus b h ad differentiam duorum sinuum uersorum, quorum unus est ipsius arcus a g, alter uero arcus a l: secunda uero cõponens est, ut sinus recti a g ad sinum rectum b h: quare



proportio sinus totius ad sinum complementi anguli a c b componitur ex duabus, proportione scilicet sinus uersi b h ad differentiam duorum sinuum uersorũ, quos diximus, & ex proportione sinus recti a g ad sinum rectum b h, & ideo etiam proportio sinus totius ad sinum complementi anguli a c b componitur ex proportionibus duabus, scilicet proportione sinus recti a g ad differentiam duorum sinuum uersorum prædictorũ, & proportione sinus uersi b h ad sinum rectũ eiusdem arcus b h, hæc autem proportio composita est cognita propter sinum totum, & sinum complementi anguli a c b dati, cognitos, prima denique componẽs est nota: est enim arcus a g datus, & ideo sinus eius rectus cognitus: itẽ arcus a l est datus, ipse enim est differentia duorum arcuum a k & g k, siue duorũ a b &

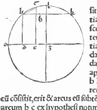
 g h, qua-



g h, quare uterq; arcuum a g & a l sinum uersum accipiet notum, quorũ sinuũ uersorum differentia non latebit: sic igitur prima proportio componens notos habet terminos, ea autẽ proportiõe subtracta ex ipsa proportione, relinquetur secunda componens proportio cognita, quæ erat sinus uersi b h ad sinum rectum eiusdem, quare per huius arcus ipse b h non ignorabitur. ex duobus autem arcubus a g & b h cognitis, reliqua quæ proponebantur quærenda, argumẽto huius absoluentur, quorum gratia contemplati sumus.

XIII.

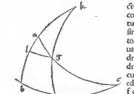
Si duorum arcuum differentia data fuerit, cum differentia sinuum eorum uterq; notus resultabit.



Sint duo arcus a b & a c, quorum differentia b c sit data, duo autem sinus eorum b d & c e differentiam habeãt cognitam. Dico q̃ uterq; eorum innotescet. Duco enim cordam b k orthogonaliter incidentem sinui recto c e in puncto h, eritq; c h differentia duorum sinuum, subtendatur etiam arcui b c corda sua b c, quã oportet esse notã propter arcũ ipsum datum: sic ex duabus lineis b c & c h notis angulo apud h recto existente, per primi huius angulum c b h metiemur, ac si in centro alicuius circuli quiesceret: nunc autem, quoniam in circumferentia supra arcũ cõsistit, erit & arcus cũ subtẽdens, scilicet arcus c k notus, cui si adiunxerimus arcum b c ex hypothesi notum, totus arcus b k notus redundabit, & ideo dimidius arcus b l, inde quoq; complementum suum a b innotescent; ex arcu autem a b & b c notis conflabitur totus arcus a c notus, sicutrunq; memoratorum arcuum notum effecimus, quod erat absoluendum.

XIIII.

In omni triangulo rectangulo duos habente acutos angulos, sicut sinus complemẽti anguli cuiusuis acuti ad sinum totum, sic, quod sub sinu complementi lateris sibi oppositi, & sub sinu reliqui acuti continetur ad quadratum sinus totius.



Triangulus a b c habeat angulum a rectum, & reliquos duos acutos. Dico sinum complementi anguli c acuti esse ad sinum totum sicut quod sub sinu complementi a b & sinu anguli continetur ad quadratum sinus totius, quod sic demonstratur. Producatur uterq; arcuum c a & c b, ut fiant duo quadrãtes c e & c d, similiter b g & b h fiãt quadrantes, continuenturq; puncta d & e per arcum d e, qui extensus concurrat cum h g educto in f, erit ergo uterq; arcuum d f & h f quarta circuli propter angulos d & h rectos. deniq; duo arcus e d & a b inferius educti concurrant in k. Iam k d ad d f componitur ex duabus k b ad b g, & g h ad h f, de sinibus loquor, Sed k d est complementum anguli a c b, quoniam

k est po-

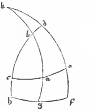
k eſt polus circuli c e ꝓpter angulos a & e rectos. k b autem eſt complementum lateris a b oppoſiti angulo a c b, & g h eſt quantitas anguli a b c, unuſquiſq; autem arcuum d f, b g & h f eſt quadrans circuli. Cum itaq; proportio eius, quod ſub antecedentibus componentium continetur rectangulum ad id, quod ſub conſequentibus eorum continetur, id eſt ad quadratum ſinus totius ex eiſdem proportionibus componentibus componitur, patet propoſitio.

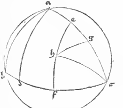


XV.

Dato triangulo ſphærali circulum circumſcribere.

Modus circumſcribendi & inſcribendi circulos eſt, ut in rectilineis triangulis, diuidendo ſcilicet latera per æqualia, aut angulos etc. uerum diametrum circuli circumſcripti aut inſcripti inueſtigare, alia requirit media. Dupliciter nanq; poteſt inueniri diameter circuli circumſcripti, aut ſcilicet per tres cordas notas, aut per arcus ipſos & ſcientiam triangulorum ſphæralium, de inſcriptione non ſic, nam quicunq; circulus circumſcribit ſphæricum triangulum, is etiam rectilineum circumſcribit, ex tribus cordis trium arcuum conſtantē, quod inſcripto circulo non accidit. Triangulo a b c ſphæralo circumſcriptus eſto a b c circulus, cuius ſemidiametrum quærimus per ratio'nem arcuum. Sit a d arcus perpendicularis ad b c, b c per medium diuidatur in f puncto, unde exeat perpendicularis f e, in quo neceſſe eſt eſſe polum circuli circumſcripti. diuidatur item a c per medium in g, eductusq; perpendicularis occurrat arcui f e in h, qui erit polus circuli circumſcripti. ex tribus autem datis lateribus angulum c habebis, & deinde propter f c notum perpendicularis quoq; f e cum angulo f e c innoteſcet, & cum arcu e c, hinc e g notificabitur. & deinde propter angulum e notum arcus g h pateſiet, cunq; & g c notus ſit, erit etiam h c notus, qui inter polum & cuſpidem anguli c, id eſt circumferentiam circuli circumſcripti comprehenditur.





Quinti & ultimi libri Triangulorum finis.

NORIMBERGAE APVD IO. PETREIVM, ANNO CHRISTI M. D. XXXIII.

IOANNIS DE REGIO MONTE GERMANI, NATIONIS FRANCICÆ,

Mathematicarum disciplinarum principis, De quadratura circuli, dialogus, & rationes diuersæ separatim aliquot libellis exquisitæ: Ad ea de re Cardinalis Cusani tradita & inuenta: quibus autor hæc præscripsit uerba Græca, quæ, ne quid illius subtraheremus studiosis, subijci curauimus.

ἐπιχειρήματα ποικίλα πρὸς τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμοὺς Νικόλεω τοῦ Κουσαίου ἐκδεδομένους.

εἰς τὸν ἐξοχώτατον μαθηματικοὺς. Ἰωάννην ῥηγιομοντέα καὶ διδάσκαλον αὐτοῦ γεώργιον πουρπάχιον. Ἰωαχίμου.

καὶ ποτ' ἀρηϊφίλοις ἐν' ἀθηναί' εἶδ' ἀλεμανοῖς
οὐρανίης ἱεροὺς ἐκδιδάσκοντα νόμους.
τὸν βασιλέως ἀπ' ὅρους φραγκῶν γένος αἶσαν ἰωάννην
τόν τε κασίγνητον τοῦδε πουρπάχιον.
καὶ τότε δὴ θαύμασε καὶ αὐτὼ ὧδε προσεῖπεν
οὐδ' οἴω ζήτησιν καὶ τις ἔτετμεν ὁμῶς.
ἀλλὰ καὶ ἄλλα πόνῳ τε χρόνῳ τ' ἐπεδείξατο μακρῷ
παῦτ' ἄρ' ἀπελπίστως οὐδέ τις εὗρεν ὅλως.

IOANNES SCHONER CAROLOSTADIVS GEORGIO TANSTETERO REGIO MEDICO S. D.

CVM aliquando, ut ſæpe facio, uerſanti mihi relictos ex opulentiſs. bibliotheca Ioan. de Regiomonte libros, nec numero nec argumento cum amiſſis cõparandos, ſed qui tamẽ omnes eſſent optimi, ueniſſet in manus meas libellus de quadratura circuli comparatus à Regiomontano aduerſus inuenta hac de re Card. Cuſani: ſtatim dignus mihi libellus uiſus fuit, qui ſtudioſis Mathematicarum diſciplinarum communicaretur: ſed per ocium introſpicienti hoc multo magis, quo melior utiliorq́; apparuit. Cum autem placeret mihi commendari hunc libellum præter autoris opinionem etiam alicuius horum temporũ excellentis uiri nomine, tu mihi in primis occurrebas, qui quamuis egregium librum acceſſione famæ tuæ ornare augereq́; poſſes, Georgi Tanſtetere, propter eximiam & perfectã cognitionem rerum Mathematicarum, quarum doctrina eã laudem & gloriam es adeptus, ut cum ueteribus facile parem te præſtantia tua faciat, tum quem conferre tecum ex omnib. nationib. iure poſſimus inuẽniatur nemo. Mihi igitur, & admiranti te & colenti, quod tibi ignotũ eſſe nequit, diu iã curæ fuit declarandæ uoluntatis, iudicijq́; de te mei omnibus ſi poſſem mortalibus. Qua in cupiditate quæ aptior occaſio potuiſſet ſeſe offerre mihi, quàm dedicandi tibi hunc libellum, doctiſſimi uiri, utriq; noſtrum natione, mihi etiam patria coniuncti. Cuius ut magnitudinẽ doctrinæ Italicos etiam & Græcanicos cõſtaret admiratos, ita relinqueretur intelligendum omnibus, quanti te faceremus, cuius nomen ornamento clariſs. autoris ſingulari ſcripto futurum eſſe iudicaſſemus. Neq; te inuitum teſtimoniũ iudicij noſtri admiſſurum confido, quum & te honorifice de me ſentire, & nos diligentia & laboribus innotuiſſe ſtudioſis, illorumq́; nonnullam eſſe exiſtimationem de meis ſtudijs ſciam. Quod ſi quis rem ipſam, & illud, quo de agitur, expendere uolet, inuenietur profecto celebritate tua digniſſima materia. Nam tanto ab hinc annorum interuallo tentatum opus, neq; poſtea de manibus doctorum depoſitum, ad noſtramq́; ætatem uſq; retentũ, certe debet nequaquam contemnendũ uideri. Inuenio autem Anaxagoræ tribui in circuli quadratura exquirenda, ſingularem laudem, eumq́; in carcere, in quem eſſet coniectus ab Athenienſibus,

tanq; impietatis damnatus, illam rationem conscripsisse. Græci uocãt τετραγωνισμὸν κύκλου, unde non, ut opinor, ineptiss. quadraturam latine fecerunt. Sed hanc rem multis seculis post Archimedes putatur diligentia summa exquisiuisse. Siquidem Anaxagoram constat Periclis temporibus uixisse, qui & auditor fuerit illius. Ita inter Archimedem & Anaxagoram ferè intercident anni ducenti octoginta octo. Possent alij nominari, ut Antipho, Briso, Hippocrates, Apollonius, qui & ipsi hoc spaciũ decurrissent, mensurationis curuæ lineæ ad regulã. Sed proxime Cardinalis Cusanus hanc quasi prouinciam gnauissime administrauit, rei difficilis, & ut ignoratæ, ita opinor effugientis captũ humanũ, quãuis cognitione comprehendi posse Aristoteles scripserit, inuenisse rationem professus. Cuius breui libello summã, eandẽq; breuiori dialogo exposuit. Quæ Ioanni nostrati acutiss. ingenij homini cum non probarentur, instituit in illa quasi inquisitionẽ quandã ad Paulum Florentinũ illis temporibus in omni genere scientiarũ peritum. Cum autẽ neq; gloriæ neq; emolumenti spe, multóq; adeo minus inuidia incitatus, hoc opus suscepisset, ne nominauit quidem ferè Cusanum, tantum abest, ut illius aliquem famæ labem aspergere conatus fuerit. Reliquimus autem omnia in Regiomontani scripto, sicut in archetypo ab ipso informata quoq; alicubi tantũ offendimus, iucundam futurã rati studiosis non cognitionẽ modo eorum, quæ ille acutiss. exquisiuisset, sed exquisitionis etiam quasi uiam & rationẽ, atq; adeo non solum quid autor effecisset libenter uisuros, sed quos etiam habuisset inter opus cogitationes & animi motus. Accipies igitur à nobis doctiss. uir & hunc libellum exiguum munusculum, & admittes testimonium de te nostrum grato libentíq; animo. Et nos, ut fecisse te comperimus, ita perges tua beneuolentia complecti. E Norico pridie idus Iulij, anno M. D. XXXIII.

QVADRATVRA CIRCVLI D. NICOLAI DE CVSA, Cardinalis, Legati, Episcopi Brixinensis.

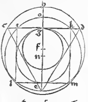
QVAMVIS iam dudum â studio Geometrico nos altior speculatio ac publica retraxerit utilitas: tamē inter innumeras seriosas curas, quas habet apostolica legatio, se inter colloquia studiosorum delectabiliter immiscuit, De quadratura circuli scibili & non scita, assertio: Quam dum nuper equitando reuolueremus, quod attigimus conscripsimus.

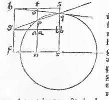
Non legimus quenquam propinquius accessisse ad huius noticiam, quàm Archimedem, qui primo quadrangulū circulo æquari ostendit: in quo semidiameter circuli ducta est in mediam periferiam. hoc quidem sic esse necesse est, si hoc censendum est esse æquale, quod nec maius nec minus esse conuincitur. In omnibus enim poligonijs, issopleuris & issoperimetris, de quibus solū in hoc scripto loquimur, semidiameter circuli inscripti si ducitur in medietatem periferiæ, oritur quadrangulum æquale. Posse autem inter semidiametrum & medietatem periferiæ medium proportionale facile constitui, Euclides ostendit. Quare tale cum sit latus quadrati æquiualentis, conscito quæ linea recta æquetur periferiæ circuli, scitur & eius quadratura, & hæc est certior ostensio. Sed dum per elicam hanc ultimam partem se reperisse crederet Archimedes, â uero defecit. Elica enim describi nequit, nisi signum â centro per semidiametrum in tanto tempore moueatur, in quanto semidiamerer pro circuli descriptione circumuoluitur. Descriptio igit̄ elicæ hos motus supponit, quorum habitudo est ut semidiametri ad circumferentiam. Præsupponit igitur id, quod quærit. Citius enim recta dari potest circulari lineæ æqualis, quàm elica uera figurari.

Nos autem considerantes trigonum & circulum in capacitate extrema loca tenere: in trigono semidiametros circulorum, & inscripti & circumscripti cōtrario modo se habere, cum semidiametro circuli, in quo circuli inscriptus & circumscriptus coincidunt, qui differunt in trigono maxime; esseq; ibi semidiametrum circumscripti maximam, & inscripti minimam, & simul iunctas breuissimas; contrario modo in circulo ubi simul iunctæ sunt diameter circuli maxima. Ob hoc scimus, omnes medias poligonias issoperimetras & issopleuras secundum capacitatem in illis ad æqualitatem semidiametri circuli accedere. Si igitur signata fuerit quantitas excessus semidiametri circuli, super diametrū inscripti trigono: & quantitas quo ipsa semidiameter circuli fuerit minor semidiametro circūscripti trigono: tunc omnis poligonia media secundum suam capacitatem in excessu semidiametri sibi inscripti super semidiametrum inscripti trigono: & diminutione semidiametri sibi circumscripti, â semidiametro circumscripti trigono proportionaliter se habebit. Nam cum illa ex diuersa capacitate uarientur, non potest diuersa esse habitudo illorum ab habitudine capacitatum. Sic semper necesse est, quòd sicut se habet excessus ad excessum, etiam sic se habeat diminutio ad diminutionē: cum capacitas ita sequatur unam diuersitatem sicut aliam, & non plus nec minus unam quàm aliam. Erunt igitur in omnibus poligonijs excessus & diminutio ta-

les se ad inuicem habentes in proportione una; quare data una habitudine, per illorum scientiam in nota aliqua poligonia, tunc scitur & in circulo. Et quia excessus & diminutio in circulo simul iuncti æquantur semidiametro inscripti trigono ut de se patet. Igitur si reperta habitudine diuidentur secundum eam semidiameter inscripti trigono, & maior portio adderetur ad ipsam semidiametrum circuli inscripti trigono haberet semidiameter circuli issoperimetri, & ita oẽ quæsitum.

Faciemus autẽ hanc partem tibi hoc modo clariorem. Ex a b linea in tres partes diuisa, c d e triãgulus designetur, & in eius latere c d signetur pars quarta a b, quæ sit i k, quæ quadretur, & sit i k l m. Describantur inscripti & circumscripti circuli, & sit inscripti trigono semidiameter f g, & circũscripti f h, & inscripti tetragono n g, circũscripti n o, Signetur deinde linea f h, & in eius medio g, lineis de f g h tractis quantumlibet, trahatur ad f h æque distans t n, cuius medium sit aa, & signetur semidiameter inscripti alicuius poligoniæ issoperimetræ, puta tetragone, quæ sit n p, & semidiameter circũscripti, quæ sit n o, & trahe de g per p in infinitum, & similiter de h per o lineam in infinitum, & ubi ille concurrunt signa q, trahe p q æquedistantem ad f h, quæ sit s r, in cuius medio signa bb. Dicimus r q esse semidiametrũ circuli quæsiti, & eius circumferentiam æqualẽ a b lineæ rectæ.

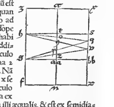


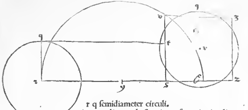


Multipliciter probatur & faciliter. Seruata igitur priori figura, ponatur g bb lineã esse differentiam capacitatum trigoni & circuli issoperimetri, & quòd linea de r s moueatur uersus f h æquedistanter. Manifestum est, lineas h q & g q de illa abscindere omnes differentias semidiametrorum circulorum inscriptorum & circũscriptorum omnium figurarum poligoniarum de trigono usque ad circulum ubi coincidunt. Est etiã manifestum, quod simul linea illa mota abscinderet de linea bb g omnes differentias capacitatum inter trigonum & circulum. Nam quanto differentia semidiametrorum differentiarum est minor, tanto figura capacior. Ideo circulus capacissima figurarum, quia ibi coincidunt, & trigonus minimæ capacitatis, quia ibi maxime differunt. Sit igitur linea mota t n, quæ abscindat lineam g bb, in aa puncto, & sit p o differentia semidiametrorum in tetragono, quare si g bb est ut differentia capacitatum trigoni & circuli issoperimetri, erit g aa ut differentia capacitatum trigoni & tetragoni. Et quia n p est ex præsupposito semidiameter inscripti tetragono, & aa p excessus eius super f g semidiametrum inscripti trigono. Ideo bb q erit excessus semidiametri circuli issoperimetri super semidiametrum inscripti trigono. Nam quæ proportio bb g ad aa g, illa bb q ad aa p, ut notum est. Correspondent autem differentiæ semidiametrorum inscriptorum in poligoniis issoperimetris cum differentiis capacitatum. Non enim euenit aliunde capacitatum differentia in issopleuris & issoperimetris, nisi ex semidiametrorum

trorum circulorum inſcriptorum differentia; quoniam capacitas ex multiplicati one illius ſemidiametri, quæ uariatur in diuerſis talibus figuris in ſemiperiferiam quæ ſemper eſt eadẽ, exoritur ut eſt notum. Sic ſi poſueris bb s lineam duorum ex ceſſuum ſemidiametrorum, ut exceſſum capacitatis circuli ſuper trigonum erit in tetragono exceſſus talis capacitatis, ut linea æqualis duabus t o & p aa lineis, & quia una eſt habitudo illius ad s bb, quæ p aa ad bb q, igitur ut ſupra. Vel ſi dixeris capacitatem trigoni minorem eſſe, quàm circuli, ut linea a g erit tetrago ni minor ut p o.

Si adhuc negaueris, & dixeris ſemidiametrũ circuli minorẽ eſſe, puta ꝙ termi- netur in puncto medio inter s & terminũ lineæ g, quæ ſit u, ita ꝙ e u ſit ſemidiame ter circuli iſſoperimetri, tunc ſi ſic extendatur u s, quouſque æquetur r u, & ſit r x, & ſimiliter extendatur f h ad æqualitatẽ r x, & ſit f z ut r x, trahe z x lineã, deinde trahe de u lineas ad g & h, & ubi ſecauerint t n lineã ſigna 2 & 9, & t n extendatur uſque ad z x, & ſit cc n ut r x. Dico, ꝙ ſi diameter inſcripti circulo iſſoperimetro ad- dit ſuper ſemidiametrum inſcripti trigono quantũ eſt bb u, tũc ſemidiameter inſcripti tetragono addit quan tũ eſt aa 2, igitur ſi ſemidiameter inſcripti tetragono ad dit quantum eſt aa p, tunc ſemidiameter circuli iſſope rimetri addit quantum eſt bb q. Hoc de ſe patet, ſi habi tudo additionum eſt ut bb u ad aa 2, & nota eſt addi- tio in tetragono, quæ eſt ut aa p, igitur erit in circulo ut bb q, cum una ſit habitudo aa p ad bb q, quæ aa 2 ad bb u. Quod autem illa ſit habitudo probatur. Nã ſi r u ponatur ſemidiameter inſcripti circulo, erit u x ſe midiameter circumſcripti, quæ coincidunt in circulo iſſoperimetro, & manifeſtum eſt, quòd r x eſt linea ex duabus illis ſemidiametris, & ſimiliter f z eſt linea illi æqualis, & eſt ex ſemidia- metro inſcripti trigono & ſemidiametro circumſcripti eidem. Omniũ igitur po- ligoniarum inter trigonum & circulum duæ ſemidiametri tales non erunt mino- res f z, nec maiores r x, & ita ſemper æqualis, erit igitur n cc æqualis duabus illis ſemidiametris in tetragono, & quia 2 9 æquatur neceſſario p o, cum g h q trian- gulus æquetur g h u, ob æquediſtãtiam q u & g h, & ſimiliter o 2 ſit æquediſtans ad g h, hinc 9 2 erit ut p o, ut ex Euclide ſcilicet 37. primi, & 4. ſexti notum tibi ex iſtit. ſed p o eſt exceſſus ſemidiametri circũſcripti trigono ſuper ſemidiametrũ in ſcripti eidem, igitur & 2 9, & cum n 2 æquetur cc 9, igitur n 2 erit ut ſemidiameter inſcripti tetragono, & 2 cc ut ſemidiameter circumſcripti eidem. Si igitur ponitur ſemidiametrum circuli ſuper ſemidiametrum inſcripti trigono addere quantum eſt bb u, addet neceſſario ſemidiameter inſcripti tetragono quantum eſt aa 2. Et hæ additiones poſſent capacitates ſuper capacitatem trigoni nominari, cum in iſſopleuris & iſſoperimetris capacitatum exceſſus ex his ſolum proueniat. Habi- tudo igitur additionum erit, ut aa 2 ad bb u, quod erat probandum. Et ita in om- nibus poligonijs pariformiter procedi poterit, ſicut in tetragono. Ex hoc conſtat propoſitum.





r q semidiameter circuli.
r s medietas a b, seu circumferentiæ circuli.
r q t s quadrangulum æquale circulo.
s x æquale r q.
y medium inter r & x,& centrum circuli r y x.
s u medium proportionale inter r s & s x. Ex nona sexti.
s u z 2 quadratum æquale circulo,cuius semidiameter r q.

Adhuc aliter. Capacitas circuli super capacitatem trigoni est maxima,& differentia semidiametrorum circulorum inscripti & circumscripti est nulla seu minima simpliciter,quia minor esse nequit,sed differentia semidiametrorum circuloꝝ inscripti & circumscripti trigono est maxima,capacitas uero eius super suiipsius capacitatem est nulla uel minima simpliciter. Esto igitur quòd aliqua linea sit ut differentia semidiametrorum in trigono,& etiam sit ut capacitas circuli super trigonum,quæ sit a b linea,quadretur igitur illa,& sit quadratum a b c d,& sit a b ut differentia semidiametrorum cum illa minima capacitate trigoni super sui ipsius capacitatem,& c d capacitas circuli super trigonum cum illa minima differentia semidiametrorum talium,& trahatur linea diametralis b c. Dico in omnibus poligonijs medijs inter trigonum & circulum lineas capacitatis super capacitatẽ trigoni cũ differentia semidiametrorũ non posse esse maiores nec minores a b aut c d,ut de se patet. Esto igitur,quòd trahatur e f linea æqualis & æque



distans ad a b & c d, & illa secetur per b c in puncto g, & sit g e ut differentia semidiametrorum talium in tetragono, manifestum est, ꝙ g f erit ut capacitas tetragoni super trigonum. Erit igitur habitudo capacitatis tetragoni super capacitatem trigoni ad capacitatem circuli super capacitatẽ trigoni,ut g f ad c d. Signatur igitũ in f g additio semidiametri inscripti tetragono super semidiametrũ ĩscripti trigono,& sit f h,& trahatũ de b per h ad c d linea, & cõtactus sit i. Dico ꝙ d i est additio semidiametri circuli isoperimetri sup semidiametrũ inscripti trigono. Quæ enĩ est habitudo f g ad d c,illa f h ad d i,sed diuersitas capacitatis in isopleuris & isoperimetris sup capacitatẽ trigoni nõ euenit nisi ex diuersa additione semidiametroꝝ circuloꝝ inscriptoꝝ sup semidiametrum inscripti trigono. Quæ igitũ est habitudo capacitatũ sup trigonũ,illa est additionũ semidiametroꝝ inscriptoꝝ sup semidiametrũ circuli inscripti trigono. Per hoc patet quæsitum.

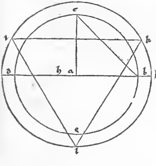
Eiusdẽ

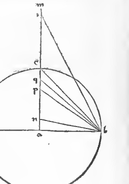
EX his nunc circa cordas & arcus scientia perfecta elici poterit. Nam si una est habitudo eius quod addit semidiameter inscripti poligoniæ issopleuræ & issoperimetræ post trigonum super semidiametrum inscripti trigono ad id, quod addit semidiameter circūscripti trigono super semidiametrum circumscripti illi poligoniæ: & si illæ additiones unâ cum differentia seu sagitta simul iunctæ æquiualent sagittæ lateris trigoni, ut ex præmissis clare constat, tunc scita habitudine talium additionum, quæ tamen numero nō attingitur, sicut nec medietas duplæ. ars est reperta ad omne scibile in cordis & arcubus. Quæ autem sit habitudo additionum sic in propinquis numeris inuestigatur. Esto ꝙ semidiameter circuli trigono circumscripti sit 14. erit semidiameter inscripti 7. cuius quadratū 49. & quadratum semilateris trigoni ter tantum, scilicet 147. & quadratū semidiametri circumscripti quater tantū, scilicet 196. erit igitur semilatus tetragoni radix $\frac{9}{10}$. & quadrati semilateris trigoni scilicet radix de 82 cum $\frac{11}{16}$. & talis erit semidiameter inscripti. Erit autem semidiameter circumscripti radix dupli numeri scilicet 165 cum $\frac{6}{16}$. Subtracta igitur radice de 49. à radice de 82 & $\frac{11}{16}$. differētia est additio semidiametri inscripti tetragono sup semidiametrū inscripti trigono, quæ erit aliquid plus ꝗ̄ duo, & subtracta radice de 165 cum $\frac{6}{16}$ à radice de 196. quæ erit parum plus quàm unū. Habes additiones, & earū habitudo est illa, per quam omnia inuestigantur. Nam si has additiones subtraxeris à sagitta lateris trigoni, scilicet 7. remanet sagitta tetragoni. Si igitur diuiseris 7 secundum præfatam additionum habitudinem, & maiorem addideris super semidiametrum inscripti trigono, habes semidiametrum circuli issoperimetri. Poteris etiam ex quadrato lateris trigoni aut quadrati scire sic quadratum lateris cuiuslibet poligoniæ dabilis: & ex eius scientia & habitudine additionum deuenitur ad sagittā & semidiametrum inscripti, & sic scitur corda. Et hæc est perfectio ultima Geometricæ artis, ad quam hactenus ueteres non legimus deuenisse. Est etiam nunc ars completa Geometricarum transmutationum, quam ante minus, tamen sufficienter quo ad quadraturam circuli descripsimus. Et putamus, nihil scibilis in Geometricis nunc uolenti diligenter in hoc medio inquirere, remanere occultum. Hæc sic maxime scripserim, ut uideatur potentia artis coincidentiarum, per quam in omni facultate occulta penetrantur. Ex sola enim coincidentia semidiametrorū inscripti & circumscripti circulorum in omnibus poligonijs differentium, & in circulo tantum coincidentium inquisitio nos ad præmissa perduxit. Laus Deo.

Dialogus inter Cardinalem sancti Petri, episcopũ Brixinensem, & Paulum physicũ Florentinum, de circuli quadratura.

PAVLVS.

Pater optime, quia me nosti à puero ueritatem quæsiuisse, quæ in Mathematicis clarius uidetur relucere, atq; quantum cupiam hactenus ignotam circuli quadraturã. Si igitur post mihi missos tuos de Mathematicis complementis, utiq; mihi obscuros atq; incertos libellos alius certior modus incidit, rogo communices. NICOLAVS CARD. Imò facilis, & ut puto certus. PAV. Dicito quæso. NI. Omnia tibi nota scio, quæ ad rem pertinent, solum hoc unico dempto, scilicet ut datæ circumferentiæ circuli scias rectam lineã ei æqualem assignare. PAV. Ita est, nam mihi ex Archimede notum est, si semidiametrum circuli duxero in lineam æqualem semicircumferentiæ, oriri quadrangulum circulo æqualem. NI. Vt igitur tibi pandam conceptũ circa id quod restat accipe propositionem. Si corda quadrantis dati circuli fuerit addita semidiametro, eiusdem oritur diameter circuli circũscripti trigono isoperimetro circũferentiæ dati circuli. Puta sit datus circulus super a descriptus b c d e, & b c quadrans tracta corda b c, & lineis a b & a c, & sit alius circulus super eodem a centro descriptus, cuius diameter f g sit ut a b & b c, scilicet g h ut b a, & h f ut b c, & inscribatur trigonus i k l. dico illum trigonum rectilineum æquari circumferentiæ curuæ b c d e. PAV. Facilis est hæc praxis atq; carissima, si hoc uerum ostenderis. NI. Conabor seruata descriptione dati circuli, lineam a c continuabo in infinitum, quæ sit m a, dico non dubium de b ad a m lineam, aliquam posse lineam duci, quæ sic se habet, q̃ si ei additur alia linea, quæ se habeat ad ipsam sicut costa ad diametrũ quadrati, exsurget linea æqualis diametro circuli circũscripti trigono isoperimetro dati





dati circuli. PAV. Admitto, nam potest dari linea sic de b ad a m tracta, cui si additur alia habens se ad ipsam ut costa ad diametrum, oritur linea minor diametro circuli circũscripti trigono isoperimetro dati circuli, ut si trahitur ad punctũ prope a, quæ ponatur esse n. & sic potest dari alia, quæ ad punctum prope m puncto o trahatur, quæ cũ costa sit maior: igitur inter n & o erit punctus, ad quem si trahitur linea de b, illa cum costa erit æqualis, nec maior scilicet, nec minor diametro circuli circũscripti trigono isoperimetro dati circuli. NIC. Bene dico igitur, ꝙ sicut si acceperis b n cũ quotquot uolueris costis suis, linea quæ oritur erit minor diametro circuli circũscripti trigono, & tot semidiametris dati circuli, q̃t costas addideris una costa dempta, & si acceperis b o, cũ tot costis suis sicut uolueris, exurget linea maior semidiametro circuli circũscripti trigono, & tot semidiametris dati circuli, quot costas addideris una dempta. Igitur etiam erit punctus inter n & o. ad quem si de b lineam traxeris, sic se habebit, ꝙ ipsa erit æqualis diametro circuli circũscripti trigono, & tot semidiametris dati circuli, quot costas addideris, una dempta: hoc aũt nõ est possibile nisi in puncto c. cuius costa est ut semidiameter dati circuli, scilicet ut b a, aliàs si costa foret maior aut minor q̃ b a, nõ erit hoc possibile. PAV. Fateor primũ, scilicet ꝙ b n cũ tot costis, sicut placuerit, sumptis, maneat minor diametro circuli circũscripti trigono isoperimetro, & tot semidiametris dati circuli una dempta, intelligo una dempta: quia unã costã iungis lineæ b n pro diametro circuli circũscripti, patet, nã cũ b n costa sit minor q̃ illa diametri, & costa sit minor q̃ a b, patet totũ. Sic contrario modo se habet linea b o, & etiã patet: est etiã certũ, si sic debet fieri, quo ad æqualitatem in aliquo medio puncto, ꝙ ille sit c, ob rationẽ quã dixisti. Si eñ costa foret minor aut maior a b linea, nullo modo sequeretur. Sed quid si quis negaret punctũ talẽ dari inter n & o? NIC. Qui negat inter minus & maius cadere mediũ æquale, negat dari posse trigonũ isoperimetrũ circulo. Ego aũt præsuppono quadraturam circuli possibilẽ, & per cõsequens oĩa sine quibus nõ est possibilis. PAV. Possem dicere nihilominus possibilẽ, sed nõ esse hoc possibile de quotquot costis ad lineã addendis, ut diameter ille circuli circũscripti trigono & tot semidiatris dati circuli una dempta oriantur, quia possem dicere, ꝙ punctus cadat inter n & c, qui ponat̃ esse p. & ꝙ linea b p cũ costa æquetur diametro dicti circuli circũscripti. NIC. Tũc nõ negas, quin si b p caperetur cũ duabus costis, ꝙ tunc foret æqualis diametro dicto, sed c[illegible]c minor semidiametro dati circuli, quia costa minor q̃ a b. PAV. Quomodo negarem hoc? NIC. Esto igit̃ ꝙ recipiam punctũ super p, qui sit q, ubi b q cũ costa sit tantũ maior diametro dicto, quantum una costa minor linea a b, hoc quidẽ tũc est possibile. Nonne hoc dato b q cum duabus costis ualeret dictũ diametrũ, & cũ hoc semidiametrũ dati? PAV. Quis dubitat? NIC. Quid si quærerem lineã, quæ cũ costa excederet diametrũ dictũ, quantũ duæ costæ sunt duobus semidiametris dati circuli minores? PAV. Oportet punctũ esse adhuc propinquiorẽ puncto c. NIC. Quid si adhuc pluribus costis additis uelles lineã pluribus semidiametris æquari. PAV. Necesse foret cõtinue punctũ accedere ad c. NIC. Recte dicis, si igit̃ in infinitũ sic processeris, necessario ultimo ad c punctũ deuenires, cũ ante c punctum costa semper sit minor a b. PAV. Optime dicis. NIC. Constat igit̃ ꝙ hoc nõ est impossibile, scilicet ꝙ inter n & o cadat punctus, ad quẽ linea ducta, sic se habeat, ꝙ quotquot costas ei addideris, ipsa erit æqualis diametro circuli circumscripti trigono isoperimetro, & tot semidiametris dati circuli, quot addideris costas una dempta, sed ille erit c punctus, & si dixeris punctũ ultra c uersus o esse, idem inconueniens sequitur, cõtrario modo arguendo, quia

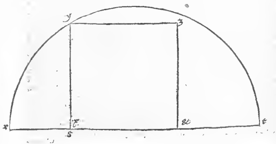
deueniet

deuenietur necessario iterũ ad c punctum. PAV. Non possum negare quin ita sit, ut clare ostendisti, manifeste cnĩ constat, ꝙ qui punctũ citra uel ultra c dixerit esse, ille errat, & error conuincitᷣ ex ipsius positione, quoniã oĩs linea maior b c cũ costa sua est maior diametro circuli circũscripti trigono isoperimetro, & minor cũ costa est minor diametro. NIC. Posset adhuc alia uia idipsum ostendi, & plures modi sunt diametros circulorũ inscriptorũ & circumscriptorũ polygonijs isoperimetris datis circulis faciliter reperiẽdi ex sciẽtia, ꝙ capacissima polygonia ĩfinitorꝝ laterũ coincidit cũ circulo, sed sufficit iste modus, reliquũ ad te remitto. PA. Satis est scire modũ curuã circumferentiã in rectam lineã transmutandi, & econuerso rectã in curuã ex quo oĩa, quae hactenus in mathematicis ignorabãtur, possunt elici, prout in mathematicis tuis tetigisti cõplementis. Qui igitur reduxerit curuã in rectã, ducat semidiametrum dati circuli in semirectã aequalẽ circũferentiae, puta sit r s ut a b, & s t ut medietas trium lineaꝝ i k l, concludendo quadrangulũ r s t u, qui erit ut area circuli b c d e, reperiat mediũ ꝓportionale inter r s & s t per nonam sexti Euclidis, & sit x y medium proportionale scilicet costa quadrati, & erit x y z & quadratũ aequale circulo. Ista nota sunt, & ideo tibi Nicolao patri optimo gratias ago, quòd tot tuis curis nõ obstantibus dignatus es tuũ ingeniũ ad hãc rem ab oĩbus doctis in Mathematicis desideratã, & nõ repertã applicare, & post multos labores & uarios modos facilimã atqꝫ clarissimam inuentionẽ tuã propalare, & inquisitores â fatiga magna releuare.

Finis, Brixinae, 1457.

Capacitates



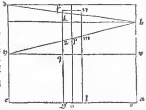


CApacitates omnium poligoniarum issoperimetrarum adinuicem & ad circulum issoperimetrum eandem proportionē habent, quam primæ lineæ unius ad primas lineas alterius, & ad semidiametrum issoperimetrum. Similiter excessus capacitatis aliarū à triangulo supra triangulum in eandem proportionem se habent ad capacitatem trianguli, quam habent excessus primarum linearū aliarum figurarum à triangulo ad primam trianguli lineam. Verbi gratia.



Sit prima trianguli a b prima alterius figuræ mediæ, ut quadrati c d prima circuli siue semidiametri c e, sit a c semicircumferentia oīm istarum superficierum, quoniam sunt issoperimetræ, erit superficies a e capacitas circuli, superficies a d capacitas figuræ mediæ ut quadrati, superficies a f capacitas trianguli. Dico primo, ꝙ qualis est proportio superficiei a e ad a d superficiem, talis est c e lineæ ad c d lineam, & qualis proportio est a d superficiei ad a f superficiē, talis est c d lineæ ad c f lineam. per primā enim sexti Euclidis dictæ superficies sunt eiusdem altitudinis, ergo suis basibus sunt proportionales. Eodem modo probatur de excessibus capacitatū, quia eædem sunt proportiones de superficiebus g e, & b d ad lineas e d & d f, uel de superficiebus b e & b d, qui sunt excessus capacitatum circuli & quadrati supra triangulum ad lineas f e & f d, qui sunt excessus primarum linearum circuli & quadrati supra primam trianguli. hæc clara sunt ex eadem prima Sexti Euclidis. Quicquid ergo de capacitatibus corporum dicitur, & capacitatibus excessuum de ipsis primis lineis, dici potest & de eorum excessibus.

Si a secunda extremitate primæ circuli ad secundam trianguli linea recta ducatur æquedistanter basi in ea proportione, qua diuidet excessum secundæ supra primam ipsius trianguli, in eadem proportione diuidet excessus secundarū à primis omnium aliarum figurarum mediarū. Sit supra extremitatem lineæ a c erecta linea a b, quæ sit prima circuli, & super alia extremitate dictæ lineæ a c, sit erecta linea c d, quæ sit secunda trianguli, quia linea a b est minor linea c d, si à puncto b trahatur linea b e æquedistans basi a c, perueniet in linea c d, & diuidet excessum secundæ à prima, qui est h d in quadam proportione d e ad e h. Dico ꝙ si prima & secunda alicuius figuræ mediæ describatur, ut g i prima, & g f secunda, ꝙ excessus secundæ à prima, qui est f i diuident ab ipsa b e linea in puncto k, in eadē proportione quæ erit f k ad k i ductis lineis d b h b. ita ꝙ erit eadem proportio f k ad k i, quæ d e ad e h, totus enim triangulus d h b diuisus est per æquedistantem basi f i, erit ergo proportio e b ad k b, sicut d h ad f i, & eadem proportio erit d e ad k f, & e h



b ad k.

a d k i propter similitudinem trianguloꝝ, sicut e b ad k b: Sicut ergo d e ad f k, ita e h ad k i, permutatim ergo sicut d e ad e h, ita f k ad k i, ergo illi excessus proportionabiliter sunt diuisi, quod fuit probandũ. Forte dicitur, ꝙ si g f est secunda unius figuræ mediæ, quòd g i non erit prima. Erit ergo prima eiusdem figuræ aut maior g i aut minor. sit primo maior, & sit l m, quã extendo sursum usq; ad n, ita quod l n sit æqualis g f, & traho lineam f n æquedistanter basi propter eandem longitudinem duarum linearũ g f, & l n. Inter duo ergo puncta g l sunt signandæ plures primæ & secundæ lineæ figurarum mediarum. Signetur una, & sit o p prima, quæ extendatur usq; ad secundam eiusdẽ figuræ, aut proueniet infra lineã f n, aut in ipsa linea, aut supra. Non infra ipsam, nec in ipsa, quia est secũda figuræ minoris capacitatis, ergo deberet esse longior, non tamen potest poni longior, quia g f est posita inter figuras minoris capacitatis, & esset breuior, quod est impossibile, quia non diminuendo procederent secundæ lineæ uersus capaciores figuras incedendo, quod est impossibile. Eodẽ modo dicetur impossibile sequi, si dicatur, quòd prima eius erit minor g i. Cum ergo nec maior nec minor dici potest, ipsa g i erit prima, quia omnes excessus secundarum à primis in eadem proportione diuidentur, quod fuit probandum.

Hæc uidetur declaratio undecimæ conclusionis uestræ, in qua pendet tota demonstratio quadraturæ. Nam qualis est proportio h q ad q i, talis est h r ad r b. Istarum autem quatuor linearum proportionaliũ tres primæ sunt notæ, h q prima, quia subtractio sagittæ quadrati uel alterius mediæ à sagitta trigoni q i. Secunda est etiã nota, quia excessus primæ tetragoni à prima trigoni. Tertia etiã est nota, h r, quia sagitta trigoni. Si ergo multiplices h r in q i, & diuidas per h q, habetur r b nota, quæ adiuncta primæ trigoni r a erit a b nota prima circuli siue semidiameter, quod intenditur. Sed non uideo cur duæ lineæ h b & b d concludentes omnes illos excessus primarum & secundarum, non possent esse curuæ omni genere curuitatis, & tunc non procederet demonstratio: erit enĩ illud quod in decima tua conclusione dixisti, ꝙ primæ capacioꝝ erũt semper maiores, & secundæ minores: hæc uolo mihi in præsenti sufficiãt. Multa habeo, quæ me mouent, quòd istæ coincidentiæ siue intensiones & remissiones formarum nõ per lineas rectas signati debeant, ut moderni ponunt, sed in aliud tempus reseruo. Vale.

Detur uenerabili nostro fideli dilecto magistro Georgio Peurbachio Astronomo.

Declaratio rectilineationis curuæ, quæ ponitur in primo modo secundi libelli de Mathematicis complementis.

PRima suppositio. Sexta cum medietate portionis quintæ, quæ cadit inter curuam & quadratã potest æquari b e curuæ. Hæc suppositio certa est ut in litera. Secunda suppositio. Sexta cum medietate portionis, & quinta cum medietate differẽtiæ cordæ, quæ est sexta, & partis quintæ, quæ etiam est corda, possunt æquari b e curuæ bis. Illa suppositio probatur uti præmissa in textu probantur. Nam dabilis est locus, ubi sunt maiores b e curua bis, & ubi minores, & ideo & ubi æquales. Dico hanc secundam suppositionem non habere locum, nisi ubi differentia est ut portio, & hoc prima suppositio. Nam si dixeris in secunda suppositione, differentiam maiore portione, erit igitur quinta minor sexta, quæ est sextæ æqualis, quãdo differentia cordarũ sicut portio quintæ, & minor si differentia maior, & maior si differentia minor, ut de se patet. Esto igitur, ꝙ ad sextam addatur

tota portio, & ad quintam tota differentia, tunc erunt æquales, & quælibet maioris b e curua. Si igitur subtrahitur æquale, ut quælibet sit sicut b e curua, tunc necesse est ꝙ de sexta cum portione subtrahaẽ, plusquā medietas portionis, cum portio ponatur maior differentia, & oportet ꝙ de differentia subtrahaẽ minus ꝙ̃ medietas, & tantum minus eius medietate quantum prius plus medietate portionis, ut simul maneat medietas portionis & medietas differentiæ, quæ additæ sextæ & quintæ, efficiant b e curuam bis, ut de se patet. Sexta igitur cum medietate portionis erit nunc maior b e curua, non erit igitur sexta cum medietate portionis æqualis b e curuæ differentia portionẽ excedente. Puta tu dicis, ꝙ b g quinta cum medietate differentiæ f e sextæ, & b g cordæ quintæ, & e f sexta cum medietate f g portionis simul æquentur b e curuæ bis, & dicis differentiam f e & f b maiorẽ f g portione. Sit igiẽ linea h i ut quinta b g, cui addatur differẽtia quæ sit ut i k. Sit alia linea sub dicta descripta l m ut sexta f e, cui addatur portio f g & sit m n ut f g, linea h k est ut linea l n, signetur medietas differentiæ quæ sit i o, & medietas portionis quæ sit m p, cadat orthogonaliter inter p & o, quæ sit r s. Quanto igitur m s est minus medietate portiōis quæ est m p, tanto i r maior medietate differentiæ quæ est i o, erit igitur l s æqualis b e curuæ, sic sexta l m cum medietate portiōis est maior b e curua, ubi ergo sexta cū medietate portionis debet esse æqualis b e curuæ, medietas differentiæ non erit maior medietate portionis. Sic si dixeris differentiā minorẽ portione, sequiẽ sextā cū medietate portionis minorem b e curua, oportet igitur, si sexta cum medietate portiōis debet esse æqualis b e curuæ, quòd differentia sextæ & cordæ quintæ nō sit maior ac minor portione, quo casu probat primum præsuppositū secundum, scilicet quintā cum medietate differentiæ, & sextam cū medietate portionis, tunc æquari b e curuæ bis, quando differentia fuerit ut portio, & hoc est, quando quinta est ut sexta, & hoc est intentum. Ecce mirabilem modum ostensionis, quoniam siue dixeris differentiam æquari portioni in secūda suppositione, siue non æquari, sequitur in prima suppositione differentiam æquari portioni, & per consequens & in secunda suppositione, & est quædam coincidentia oppositorum, quoniam per hoc ꝙ dicis differentiā non æquari portioni, sequitur, ꝙ æquetur, & falsum interimit seipsum.



DE VNA RECTI CVRVIQVE MENSVRA.

Nicolaus Cardinalis S.Petri.

QVia uidi practicum magisterium commensurationis curui & recti deesse Geometricis, ideo ipsos imperfectos, & plura quæ possibilia fieri uident, ad actum deducere non posse, conatum igitur non paruum adhibui, ut ipsam artem assequerer, quam si reperi, tu qui hæc leges, iudicabis.

Commensurari autem curuum & rectum dico, quando una mensura mensurantur, puta quando recta linea tot pedes habet rectos, quot arcus curuos.

Propositio prima.

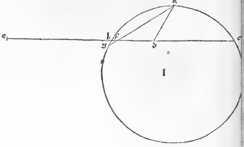
Dato arcu, rectam ei commensurabilem assignare.

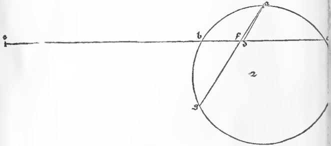
Sit b c datus arcus, cuius a medium, & trahatur corda b c, & in illa punctus æquedistans de a & b qui sit d, & hic est punctus huius magisterij, de illo igitur per b continua rectam, quæ sit d e taliter, ꝙ si de a cordam a g, quæ sit ut medietas d e per d e traxeris, illa corda uadat per f punctum lineæ d e. Sit autem d f quarta pars d e, tunc d e linea recta est commensurabilis b c arcui.

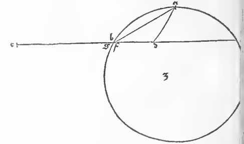
Ad hoc probandum præsuppono duo. Primo, ꝙ d e sic signari potest, ꝙ inter f punctum, per quam uadit corda, ut præfertur, & e finem lineæ d e portio æquetur tribus quartis commensurabilis recte, patet de se, nam certum est, ꝙ taliter signari potest, ꝙ f e est plus, ut in secũda figura, & etiam taliter ꝙ est minus, ut in tertia, igitur & taliter, ꝙ nec plus nec minus.

Secundo præsuppono, ꝙ quanto d e est minor, tanto f e in habitudine ad d e est minor, & d f maior, & quanto maior huius contrarium; hoc etiam per se patet ad oculum in secunda & tertia figuris.

Dico igitur primum præsuppositum uerificari, aut quando d e est quæsita scilicet commensurabilis arcui, aut quando minor, aut quando maior. Si primum, habeo intentum, nam oportebit tunc d f esse necessario quartã partem d e. Si dicis uerificari, quando d e est minor commensurabili, hoc est impossibile, nã cum tunc ex secunda suppositione f e sit minor in habitudine ad d e, & d f maior q̃ incommensurabili, & secundum te æquabitur tribus quartis commensurabilis, nõ erit d e minor commẽsurabili sed maior: sic si dicis uerificari, quando d e est maior commensurabili, similiter implicat contradictionem.


a
e
b
f
g
d
c
1


a
e
b
f
d
c
g
2


a
e
b
g
f
d
3

Propositio secunda.

Datæ rectæ arcum dati circuli commensurabilem assignare.

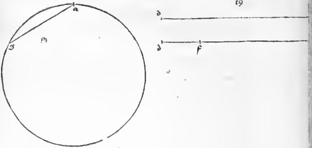
Sit data recta d e, & datus circulus, cuius centrum t, & diameter s t u, & a medium omnium arcuum, de a trahe cordam a g, quæ sit ut medietas d e, & in d e signa eius quartam, quæ sit d f, & applica d e æquedistanter ad t u, taliter ꝙ f cadat super a g cordam, & ubi secat circumferentiam circuli pone b, si tunc d æquedistat de b & a, erit b a medietas arcus quæsiti: continua igitur b d quousque compleatur corda in c, & habes b c arcum commensurabilem d e rectæ. totum patet ex præmissa.

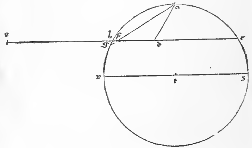
Vt autem uideas d esse punctum huius magisterij, qui si a g corda est b a arcui commensurabilis, ab f sectione, ubi a g secat b c d, ipse punctus per medietatem a g distat. Considera, ꝙ quanto b c corda est maior, tanto d de b & a plus & de centro circuli minus distat: & quanto minor huius contrarium, & hoc de se patet. In maxima igitur corda d minime distat à centro circuli, & maxime de b & a in minima corda maxime distat de centro, & minime de b & a, unde d in maxima corda est in centro circuli, & in minima in circumferentia eius, sed certũ est, ꝙ d siue in maxima corda siue in minima æquedistat de b & a, igitur sic in omnibus intermedijs.

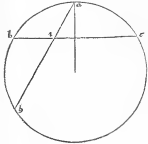
Vnde sequitur, ꝙ si b c est corda arcus tertiæ partis circumferentiæ circuli, d punctus à centro & de b & a æquedistabit.

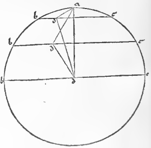
Adhuc sic de a potest trahi a h corda per b c, quam in i puncto secet. Dico a i h sic potest trahi, ꝙ a i erit distantia puncti d de a in illa corda a h, hoc certum. Aut igitur hoc erit, quando a h est ut b c, & tunc i sectio æquedistabit de b & a, & erit d utriusque, & est intentum. Aut a h est minor, & hoc non est possibile, quia tunc a i esset maior q̃ prius quando æqualis, aut quãdo maior, & est iterum impossibile, quia a i minor q̃ prius quando æqualis.

Propositio ter-







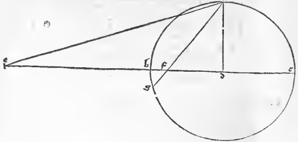


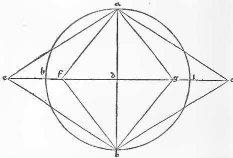
Propositio tertia.

Arcui semicirculi rectam, & areæ eius curuæ rectilinealem commensurabiles designare.

Sit circulus, & b c arcus semicirculi, cuius medium a & d punctus magisterij æquedistans de a & b, puta hoc casu centrum circuli. & trahe a d lineam, deinde trahe d b in continuum, & sit d e, ita quòd si medietatem d e feceris cordam a g, quæ de a per d e trahit, ipsa transeat per f punctũ d e, qui f punctus distet de d per quartã partẽ d e modo quo supra. Deinde claude orthogoniũ per a e latus, dico aream a d e orthogonij commensurabilem areæ semicirculi, & d e commensurabilem arcui b c. Secundum patet supra. Primum patet eodem modo ut prius per duo supposita, quorum primum est d e posse signari, & per e a orthogonium claudi, taliter quòd si ducitur corda, quæ sit medietas d e de a per d e, ut sit a f g area inter a f e, cadens erit commensurabilis tribus quartis areæ semicirculi. patet, quia datur ubi est plus & ubi minus, igitur & ubi nec plus nec minus. Secundo præsuppono, quòd quanto d e fuerit minor, tanto illa area a f e est minoris habitudinis ad totam aream orthogonij a d e, & quanto maior maioris. Primum igitur præsuppositum aut uerificatur, quando area orthogonij a d e est commensurabilis areæ semicirculi, & habetur intentum. Aut ubi minor seu maior, & utrumq; implicat contradictionem præcise modo quo supra.

Palam igitur est, quòd si orthogonius, cuius unum latus est semidiameter, & aliud cum illo rectum angulum faciens, est commensurabile toti circumferentiæ circuli; area illius orthogonij est commensurabilis areæ circuli. Et quia quælibet polygonia in aliam uerti potest, igitur poteris areæ circuli commẽsurabilem aream trianguli, quadranguli, quadrati, pentagoni, & cuiuscunq; alterius polygoniæ assignare, & cuiuslibet partis circuli etiam circulo incommensurabili. Dare etiam angulos poteris datarum linearum habitudinis, & figurarum omnium unius in aliam cõmensurabiliter; dico mirabiles transmutationes facere. Salua cuiuslibet figuræ capacitate & propria inuariabiliq; natura, & ad multa occulta, quæ uix enarrari possunt, hac arte peruenies, etiam in sectionibus & uniformiter difformibus curuitatibus, etiam angulos & instrumenta componere poteris, cum quibus præmissa facilime & subito facies, quæ tuæ industriæ relinquimus.





Area a g b f cõmensuratur medietati areæ circuli, & area a b c e commensuratur areæ circuli, medium proportionale inter a d semidiametrũ & e c rectã medietati circumferentiæ circuli commensurabilẽ, quã nona sexti Euclidis reperire docet, est costa quadrati, cuius area commensuratur circulo d f recta commensurabilis est octauæ circumferentiæ circuli, ideo area a d f orthogonij commensuratur octauæ areæ circuli. Ideo quando habes rectam arcui commensurabilem, habes & aream rectilinealem areæ portionis circuli commensurabilem.

F I N I S.

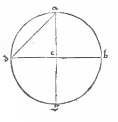
ἐπιχειρήματα ποικίλα πρὸς τοὺς τοῦ κύκλου τετραγωνισμοὺς Νικόλεω τοῦ Κουσαίου ἐκδεδομένους.

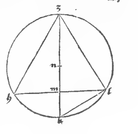
DE QVADRATVRA CIRCVLI SECVNDVM NIcolaū Cuſenſem, Dialogus Ioan. de Monteregio.

ARISTOPHILVS. CRITIAS.

ARIS. GRANDIS me tenet huius uiri admiratio, cui & ſi publicis arduisq; circūuento negocijs, tantum tamq; clarum philoſophiæ munus ſuo ex theſauro natura ipſa deprompſit. Scio equidem plurimis iamdudum philoſophis huiuſcemodi metæ attingendæ libidinem inceſsiſſe: plerisq; quidem fruſtra nitentibus, Archimedi autem palmam non iniuria ueniſſe, rametſi principia ſua non modo non admittere cogatur animus, uerūetiam quodammodo horreat: ſpiralem uidelicet lineam deſignare, eiq; in puncto quolibet contingentem applicare. Hic autem ſpectatiſſimus Dei & naturæ præco, nihil prorſus ambigui admiſcere uidetur. Sed quid mecum hæc muſſitando diem contero? conueniendus hercle eſt Critias meus, ut inuentū hoc q̃primū reſciat: cui, niſi me animus fallit, ingens auri pondus aduexiſſe uidebor. mirum autem ſi nō domi ſuæ manens ad lucernam etiam hoc mane literis inuigilet. Adibo. hui graues haſce fores aperi obſecro Critia. CRIT. Quis eſt? ARIS. Ariſtophilus ſaluere te iubens. CRIT. Recte quidem te demiror, qui hoc triduo nuſquã apparebas, auroram uero literis meis delectiſſimã importunus adimis. ARIS. Haud ab re Critia mihi ſuccenſes, habituro tamen, ſic ſpero, ueniam, ubi quod porto nouum perſenſeris. CRI. Id noui amico cōmune facito. ARIS. Faxo equidē libens, ſi prius calamum medullæ tuæ furem reijcias. CRI. Ita'ne iocis cedendum tuis? Aris. Imò ſerio. Cri. Perge igitur quod lubet. Aris. Pone igitur quod iuſſi. Cri. Ah miſſos fac hoſce ludos, niſi inſolens aufugere malis, quem pridem importunum admiſi. Aris. Profecto miſeret me tui nunq̃ ſe macerare deſinentis. remitte quæſo pauliſper animū tuū, & labori quietem intermiſceas tuo. uix oculos tuos uideo dimidios; genæ pallidæ; liuida labiorum tinctura, quid mali portendant ipſe calles. Cri. Nihil eſt quod uerear: iam enim pridem febris grandiuſcula id reliquit ueſtigiorum. Verum ita ſunt res humanæ, ut quæ tibi conducant, alius quiſpiam q̃ ipſemet certius iudicarit. auſcultandum tibi cenſeo Ariſtophile. Aris. Nobile cunctis iamdudū philoſophis natura expoſuit brauium, cuius obtinendi gratia pleroſq; Græcos clariſſimos egregie cucurriſſe atq; concertaſſe aiūt. Cri. Quas mihi nebulas affers? Aris. Archimedem in ea re cæteros ſuperaſſe fama eſt. Cri. Pergin perplexe loqui? Aris. Ambitum circuli dirigere, areamq; ſuam quadrare perpaucis hactenus libuit. Cri. Imò nemini conanti etiam iter pateret, niſi Siculus ille Geometrarū flos inuenta ſua literis mandaſſet. Aris. Aliū tibi dabo qui lucide breuiterq; lineæ circulari æqualem rectam dare pollicetur, unde & circulum ipſum quadrare haud arduum uidebitur. Cri. Hippocratem forſitan quem per lunulas id aſſequi conatum defeciſſe clamant, ubi lunulæ exagonæ æqualem triangulum rectilineum datum iri tanq̃ certum pridem & firmatum aſſumit,

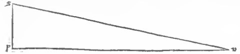
sumit, nõ enim nisi lunulæ tetragonæ æquum trigonum rectilineum designauit. Aris. Non Chium illum, sed moderniorem uirum præstantissimum. Cri. Græ= cum an Latinum? Aris. Latinum. Cri. Perplacet si Græca rerum inuenienda= rum facilitas Latino cuipiam accesserit, ut quamuis uiri, proh fortunæ inuidiam, incertis hac nostra tempestate uagentur sedibus, bonarum tamen artium suarum simulacra animus quisquam possideat egregius. Sed tantæ rei inuentorem nosse uelim. Aris. Vidistin opus quoddam de docta ignorantia? Cri. Vidi. Arist. Alius autem de staticis experimentis libellus tibi unq̃ obiectus est? Cri. Eccum ipsum. Aris. Qui hunc & alia insuper clarissima edidit opera digito monstra= retur, si Romæ unà essemus. Cri. Quàm iuuat hominem uidere. Aris. Princi= pem appelles Christianæ religionis: rubro etenim galero tegitur, summoq; Pon= tifici frater habetur dignissimus. Cri. Etsi uirum hunc uidere nunq̃ licuerit, tan ta tamen, tamq; insignia monimenta sua facile mihi persuasere, ut quidquid phi= losophus ille asseruerit, à ueritate alienum esse non possit. sola enim autoritate sua fides extemplo nascitur. Sed quonam pacto rem illam tradiderit, Aristophile do= ceri percupio. Aris. Si benignas aures orationi crudæ, quam Geometra uitare nequit, accõmodes, planè dabo sententiam eius. Cri. Ha bone uir, quasi uenusta ti magis q̃ ueritati studendũ sit: quin uocabulis peregrinis, aut characteribus qui buscunq; utaris licet, modo quod uerum est afferas. Aris. Ita intelliges. hanc cõclu sionem uir ille affirmat. Si ex semidiametro circuli dati, atq; corda quadrantis eius directe coniunctis, diametrum alteri circulo constitueris: triangulus æquila- terus eidem inscriptus circulo dato isoperimeter habebitur. Cri. Teneo quod as seris. Verum ut Geometris mos est, figurationem instituto tuo accõmodandam censeo, quo res ipsa cognitu fiat facilior. Aris. Oportune mones. Pingo igitur circulum a b g d, cuius duæ diametri a g & b d ad rectos angulos se secent in e centro circuli, ducta corda quadrantis a d, alius demum circulus z h k l sup centro n descriptus, diametrũ habeat z k æqualem duabus lineis, e d uidelicet se midiametro circuli dati & a d cordæ quadrantis, pariter iunctis. inscribatur de= niq; huic secundo circulo triangulus æquilaterus z h l. Cri. Quid tum postea? Aris. Triangulum z h l inquit ille isoperimetrũ esse circulo a b g d. Cri. Tres ergo lineas rectas z h, h l & l z ambitum circuli a b g d æquare affirmat. Aris. Rem tenes. Cri. O memoratu dignam conclusionẽ. quæ si uerum prædi= cat, uetus iamdudum inimicitia circuli & figurarũ rectilineatum prorsus abolebi tur,





tur, circulus enim posthac in figuram rectilineam quamlibet ac uice uersa spaciũ
rectilineum in circulum facile transmutabitur, quod in figuris tuis Aristophile su
pra definitis intueri licebit. Corda enim quadrantis a d semidiametrũ e d poten
tialiter duplans ex penultima primi elementorum Euclidis principis nostri data
erit, utraq; igitur rectarum e d & a d unde & z k æqualis eisdem data ueniet,
cumq; ipsa z k diameter circuli z h k l potentialiter sesquitertia sit ad latus tri
anguli æquilateri eidem circulo inscripti. Aris. Hem quam turbam mihi inge-
ris, ubi dicis z k diametrum potentialiter esse sesquitertiā lateri trianguli z h l?
Cri. Scies quid uelim. Potentiam lineæ rectæ quadratũ suum uocant Geometræ.
Aris. Id me non fugit, uerum quadratis linearum z k & z l proportionem es-
se sesquitertiam ostendas quæso. Cri. Duc igitur in circulo tuo maiori cordam
k l. Aris. Factum. Cri. Ea habebitur latus exagoni æquilateri circulo z h k l
inscriptibilis. Aris. Confiteor, quandoquidē arcus k l est sexta pars de ambitu
circuli huius. Cri. Dimidiam insuper circuli æquabit diametrũ, nisi decimũquin
tum quarti elementorum theorema mentiatur, quadratum ergo z k diametri ex
quarta secundi quadrato k l quadruplũ accipietur. Angulus autem rectus z l k
duo quadrata cordarum z l & l k ipsi quadrato z k æquipollere iubet. Vnde &
ipsa quadratum k l quadruplabunt; quadratumq; k l tertiam partem esse qua-
drati z l nemo inficias ibit. Congeries itaq; duorum quadratorũ z l & l k, cui
æquipollet quadratum diametri z k super quadratum z l, addit eius tertiā par
tem. Duo igitur quadrata z k uidelicet diametri, & z l lateris trianguli propor
tionē habebunt sesquitertiā. Aris. Iam satis est, ostendisti etenī ipsam z k dia-
metrum lateri z l potentia sesquitertiam fore, perge quod cœpisti. Cri. Datam
ergo accipiemus cordam z l, ideoq; cōgeries trium laterũ trianguli z h l æqui
lateri dabitur, cui æqualem rectam p r designare licebit, quæ & ambitum circuli
a b g d si uerum præ se fert conclusio æquabit. Qđ si ex termino p eiusdem re-
ctam p s erexeris æqualem semidiametro e d circuli dati claudendo triangulũ
s p r: ille triangulus circulo a b g æquabitur, quemadmodũ in libello mesurati-
onis circuli demonstrauit Archimedes. Ex ultima autē secũdi elementorũ triangu
lo s p r æquale quadratum describere didicisti, quod & circulo a b g d nimirũ
æquabitur. Aris. Recte procedit ratio tua. Sed de conclusione supra memorata,
quæ caput huius rei uidetur, quid sentis? ueramne accipis, an non? Cri. Auctori-
tas uiri magna est. Aris. Quid ni? Cri. Fama præclara. Aris. Etiam. Cri. Ni
hil neq; sapientiæ neq; bonarum artium reliquit intentatum. Verum ut profun-
de res diuinas in animo uersat, ita subtiliter omne genus philosophiæ perlustra-
uit. Aris. Quas per ambages serpis? Siccine satis mihi respondisse te arbitraris?
quin ad rem ipsam conuertaris decet. Cri. Tantæ rei idoneus iudex aliunde pe-
tendus est. Sed tu si quam huiusce conclusionis probandæ uiam habes proferto.
Aris. Nullam prorsus inuenio, ratione tamen quadam demonstrasse uidetur, quæ
nunc in mentem uenire non potest. Cri. Ita negligentiam tuam aperte fateris?

Aris.



Aris. Siue negligentiam ſiue inſcitiam dicere malis nihil mea refert, hoc unum
ſcias Critia, ſyllogiſmo ſuo ſæpenumero me deluſum eſſe. dum enim meram præ
ſe ferre certitudinem uidetur, neſcio quæ animo irrepit fluctuatio, ueluti anguillā
ptendēs quo intentius manū conſtringit, eo facilius illa ſubterfugit. Cri. Fac re-
miniſcaris. Aris. Quieſce. Cri. Rediit memoria? Aris. Nondum. Cri. Profe
cto mirari non ſufficio, ꝙ tam facilem circuli rectilineationem nemo priſcorū ad-
inuenerit, qui longe difficiliora eniſi ſunt. Aris. Quid tu tecum? Cri. Nihil ad te
Si quod quærebas menti redditum eſt, ediſſere. Aris. Ah Critia mi nō eſt hac in
re terendus dies, Demipho noſter exemplum habet, is ubi domum redibit e ueſti-
gio nobis afferet. Cri. Potes ne recordari quo demonſtrationis genere uſus fue-
rit ille philoſophus, mathematico uidelicet, an alio quopiam? Aris. Mathemati
cum haud uidetur. Cri. Fruſtra igitur hoc mane obtundis, qui concluſionē hanc
abſq; demonſtratione portas; faciſq; ut hac atq; illac curſitem ſi quid certitudinis
habeat explorando. Dum autē ſic cogito, modus occurrit, qui, niſi me animus fal
lit, quietem nobis afferet. Aris. Eum exponas amice mi. Cri. Auſculta igitur.
Archimedes noſter in libello menſurationis circuli officio numerorum demōſtra
uit ambitum circuli ſiue circumferentiā addere ſuper triplum diametri ſuæ minus
quidem ſeptima parte eius; maius autē decem ſeptuageſimis primis eiuſdem dia-
metri. Aris. Nemini dubiū id eſt. quid tum poſtea? Cri. Scies pedetentim, ſi pri-
us ſemidiametrū e d circuli minoris in quadringētas nonaginta & ſeptē æquas 497
particulas apud intellectum ſecueris, erit enim una earum quælibet menſura com
munis omnibus lineis propoſito noſtro ſeruituris. cum rationales duntaxat line-
as admittere ſit conſilium; ubi ergo unitatis characterem uidebis in lineis quidem
unam huiuſmodi particularum, in quadratis autem quadratellum eius fac intelli
gas. Mirandum præterea nequaq; eſt, ꝙ numeros huic linearum negocio accom-
modarim, cum Archimedis ſupra memorato exemplo ſatis liceat. Lineis deniq; ſi
ue longitudine ſiue potentia cōmuincātibus proportionē, eſſe quā & numerorum
decimus Euclidis theoremate ſuo quinto docuit. imò uero lineæ tales ſunt numeri
realiter, intellectu ſecundum unitatem menſuræ cōmunis eas diſcernente. Aris.
Placet apprime hæc tua introductio; iam enim pridem arbitrabar numeros in hu
iuſcemodi linearum comparatione nihil habere loci, cum & alius quidam circulū
quadrare fruſtra tentant numeris fretus. Sed tu quo tendebas Critia perge. Cri.
Diameter ad circumferentiam circuli ſe habet, quemadmodū ſemidiameter ad ſe-
micircumferentiam. Aris. Confiteor totius ad totum, dimidijq; ad dimidiū can
dem habitudinē. Cri. Dimidia ergo circūferentia ſupet triplū ſemidiametri ad-
dit minus quidem una eius ſeptima; maius autē decem ſeptuageſimis primis, ſic
enim in totis accidebat. Aris. Non eo inficias. Cri. Mille quingentæ ſexagin- 1561
ta una partes addunt ſuper triplum quadringentarū nonaginta ſeptem partiū de
cem ſeptuageſimas primas ipſius ſimpli. Aris. Ita eſt, una enim ſeptuageſima de
quadringentis nonaginta ſeptem partibus eſt ſeptem. hæc decies facit ſeptuagin
ta, quæ ſuperaddita mille quadringentis nonaginta uni particulis triplo uidelicet
quadringentarū nonaginta ſeptem partium, ſummā conflabunt mille quingēta-
rum ſexaginta unius partium. Cri. Laudem mereris Ariſtophile, qui tam facile
ueritatem accipias. nonne igitur ſemicircumferentia circuli mille quingentas ſe-
xaginta unam partes ſuperabit? Aris. Neceſſario res ita eſt. Cri. Totam deniq;
circumferentiam a b g d duplo dictarum partium uidelicet tribus milibus cen- 3122
tum uiginti duabus maiorem haberi negabis? Aris. Minime. Cri. Id ergo me-
moriæ ſedulo hæreat, ut dū opus eo fuerit extemplo reſpōdeas. Nunc ad triangu

lum z h l ueniendum est, ut quanta sit eius perimeter non lateat; aut quanta ma-
gnitudine minor necessario sit exploremus. Semidiametrum e d constituimus se-
cari in quadringentas nonaginta septẽ partes, quarum quadratũ tu elicias. Aris.
247009 Ducenta quadraginta septem milia & nouem inuenio. Cri. Tantum est quadra-
tum e d semidiametri, & toties quadratellũ unius sæpe memoratarum partium
in quadrato ipsius semidiametri e d reperietur. Sicut enĩ pars linealis lineas oẽs
ita quadratellum eius omnes metietur superficies. Cum autem quadratum cordæ
a d quadratum semidiametri e d duplet, erit ipsum quadratum a d quadringen-
494018 ta nonaginta quatuor milia & decemocto. Aris. Verum est. Cri. Hic numerus
non est quadratus: proximus tamen eo maior quadratus radicem habet septingẽ
ta & tria. quamobrem cordam a b minorem esse septingentis & tribus constat.
Aris. Nemini dubium. Si enim quadrato quadratũ minus existat, costam quoq;
costa minorem haberi necesse est. Cri. Erat autem semidiameter e d quadringẽ
tæ nonaginta septem partes; quibus adiunge memoratas septingentas & tres, ut
summa resultet mille ducentarum partium, quibus profecto minor est congeries
duarum linearum e d & a d. Aris. Ratio conuincit, nam idem cõmune dua-
bus inæqualibus adiectum quantitatibus duarum summarũ alteram altera mino
rem efficiet. Cri. Duabus demum lineis e d & a d simul iunctis æqualem statu
ebam diametrum z k, quæ ob eam rem mille ducentis partibus minor existet,
quadratumq; eiusdem diametri mille quadringẽta & quadraginta milia nequaq;
attinget. Aris. Teneo, mille nanq; & ducentis partibus in se multiplicatis, mille
quadringenta & quadraginta milia resultabunt. Cri. Quarta item pars quadra
ti diametri z k ex eo quadrato sublata, relinquet quadratũ lateris trianguli æqui
lateri circulo inscripti. Habent enim, ut supra cõmemoratũ est, hæc quadrata pro
portionem sesquitertiam: ueluti quatuor ad tria, ex quatuor autem si quartam sui
dempseris partem, tria residuabuntur. Aris. Bene. Cri. Quarta insuper pars de
mille quadringentis & quadraginta milibus est tricẽta sexaginta milia, quam ex
toto suo auferens mille & octuaginta milia relinqui cernes. Cũq; sit ꝓportio qua
drati z k ad quadratum z l, tanq; mille quadringẽtorum & quadraginta miliũ
ad mille & octuaginta milia; utraq; enim earum sesquitertia est; erit permutatim
quadrati z k ad mille quadringenta & quadraginta milia, ea proportio quam ha
bet quadratum z l ad mille & octuaginta milia. Quadratum autem diametri z
k minus est mille quadringentis & quadraginta milibus: unde & quadratum z l
mille & octoginta milibus minus habebit. Hæc omnia patere uidetur: aut si quã
habes ambiguitatẽ pulsam faxo. Aris. Certa intelligo uniuersa. Cri. Quadra-
tus demum proximo maior mille & octoginta milibus, is enim quadratus nõ est,
radicem habet mille & quadraginta, quãobrem linea z l minor erit iã dictis mil-
le & quadraginta. Aris. Haud incertum. Si enim quadratum lineæ z l minus est
mille & octoginta milibus, minus quoq; erit pluribus: quare & ipsa costa z l mi-
nor erit radice quadrata huiuscemodi plurium. Cri. Firma igitur in animo tuo
latus trianguli z l minus esse mille & quadraginta partibus: prope enim portui
concessimus. Aris. Non inficiabor unq;, quod syllogismo ratũ dedisti tuo. Cri.
Veritas sibi me delegit amicum: eam equidem operæprecium inuestigare studeo,
inuentã autem suis cõmonstrare cultoribus: qua perspecta autor ipse ueritatis al
tissimus digniuscule saltem laudetur. Aris. Quàm iuuat audire quonã rerum tan
dem euades ò Critia. Cri. Pauculis prius detinebere uerbis Aristophile: continu
oq; nisi fallax contentus abibis. Sed latus z l trianguli nostri æquilateri minus
esse mille & quadraginta particulis adhuc confitere? Aris. Et confiteor & certum
scio

ſcio. Cri. Si haſce mille & quadraginta particulas ter repetiero, ſummã triũ milium centum & uiginti partium colligens, nonne partes illę triplum lateris z l, id eſt perimetrum trianguli æquilateri z h l ſuperabunt? Aris. Maxime cum ut ſimplum ad ſimplum, ita triplum ad triplum, terminosq; proportionũ permutando luce clarius id uideatur. Cri. Perimeter itaq; triãguli z h l minor erit tribus milibus centum & uiginti. Aris. Negare non poſſum. Cri. Multo igitur minor erit tribus milibus centum & uiginti duabus particulis. Aris. Verum concludis, quid tum? Cri. Iam redde quod antehac dudum memoriæ mandatum iri iuſſeram. Aris. Quid hoc erat? Cri. Circumferentiam circuli a b g d maiorem eſſe tribus milibus centum & uiginti duobus. Aris. In memoria habeo. Cri. Perimeter ideo trianguli z h l, quæ minor erat tribus milibus centum & uiginti duobus, multo minor erit circumferentia circuli a b g d. Aris. Hem quo uis? Cri. Perimetrum eam trianguli z h l non æqualem eſſe circumferentiæ dicti circuli demonſtratum habes. Aris. Siccine concluſioni audes contradicere? Cri. Imò uero non audeo, ſed cogor. Plerunq; tamen concurſores ad metam ſupramodum intenti, & ſi campus tranſcurrẽdus ſit planiſſimus, auiditate brauij uacillare comperiuntur, quibus cum ne ludibrio habeamur computum cenſeo retractãdum. Aris. Recte ſuades, nam ubi alienum contrectare cœperis opus, ſi quid paulo iniquius carpas, geminum incurres uituperiũ: odium etenim amici & inſcitia te tua condemnabunt, fac iterum perluſtres ſingula. Cri. Aſpicias & tu Ariſtophile, ut ſi quis error me fugiat tibi notetur. Aris. Ita libet. Cri. Hi numeri recte iacent, hoc bene ſtat, nihil iſta multiplicatio fefellit, conſequentiæ omnes bonæ habẽtur. Quid igitur obſtat, cur non uera putes quæ concluſimus? Aris. Virum tantum temere ſententiam ſuam pronunciaſſe uix habeo ueriſimile. Cri. Quid tũ? Aris. Pace tua dixerim Critia mi, tãto philoſopho nõ poſſum nõ adhærere. Cri. Ha ha tecum ego ſentire uideor, quis enim omniũ noſtra tempeſtate hominum cæteris tantopere præſtat Geometris, ut nouam prorſus, etiam ſi tota pereat, tradere poſſit artem; cuius hactenus diuerſi & magni paſſim extitere conditores. Sanè huic uiro & lineæ & numeri libentes obediunt. Aris. Quo amplius procedis Critia doctiſſime, eo perplexiorem me reddis, duas equidem inter diuerſas partes incertus pendeo; utri earum concedã nõ ſatis doceor. Vellem non modo nõ contradicere memoratæ concluſioni, uerumetiam pro poſſe tutari, contra autem tuæ me deterrent argumentationes. Cri. Meas arbitraris eſſe rationes, quibus animi tui fidem hac concluſione arcebam? Aris. Tuas non putem, qui mirum in modũ cõfutandi officium aſſumpſeris? Cri. Meas baudquaq; fac ſuſpiceris; ſed omnium prorſus & Geometrarũ & Arithmeticorum quos priſca tulit ætas concinnem fuiſſe uoluntatem, ne quis concluſionem huiuſcemodi proferret, quibus ego præco modernus inſtituor. Quocirca non mihi, uerum illis tribuas, ſiue acerbam dixeris alienæ ſententiæ diſcuſſionem, ſiue dulcem ueritatis cuiuslibet inueſtigationem. Aris. Satis hercle perſuades, uanæ me hactenus credulitati nimium indulſiſſe. Fateor equidem trianguli noſtri æquilateri perimetrum circumferentia dati circuli minorem haberi neceſſario, tandemq; rectam æqualem curuæ circulari producere, ac ideo circulum ipſum quadrare nihil ſpei ſupereſt. Hoc unum tamen poſtremo doceas, quantum interſit ueritati & opinioni meæ iam penitus abiectæ. Cri. Quantulum id ſit, nemini mortalium natura in huncuſq; diem diſcernendum dedit, neq; enim perimeter trianguli numerum habet rebus ut antea diſpoſitis; neq; circuli ambitum rationalem eſſe lineam conſtat. Sed illud accipe defectum perimetri trianguli à circumferentia circuli dati maiorem eſſe duabus ſæpe dictarum

partium, nam ut supra ostensum habes, perimeter quidem trianguli minor est tribus milibus centum & uiginti: circumferentia uero circuli maior tribus milibus centum & uiginti duobus. Numerorum autem iam adductorum differentia est binarius: quare differentiam perimetri trianguli & ambitus circuli, maiorem binario constat esse, modico tamen: cuius deductionem cum parum afferat utilitatis missam facio. Aris. Propinque igitur ueritati concessit uir ille. Cri. Propinque adeo, ut sudoris sui fructu haud penitus frustrari uideatur: & quidem non sine gloria. in plærisq; nempe rebus uix prope uerum consistendi natura mortalibus donat licentiam. Aris. Nunc; ad te accedo Critia quin doctior abeam. Quã callide homo nodum mihi tantum dissoluit: nec; minus hilarem me reddidit contrarium ueritati refellendo, quàm si curuam circularem rectificandi areamúe suã quadrandi facultatem tradidisset. Cri. Quid tecum taciturnus reputas? si reliqui nihil est quod me uelis, abire iam licet, absoluendum mihi est opus problematum Almagesti quod cœperam, iamdudum refrixit calamus, quẽ uix domum ingressus abijci iusseras: is denuo resumendus est hora monet. Aris. Discedam hinc tua cum beneuolentia, si prius pollicearis huius negocij nostri exempla literis te mandaturum. Cri. Et scribam & communia tibi faciam: ea tamen lege, ut amicis nostris nostra scripta uisuris Critiam suum cõmendare studeas, seq; haud mordaci dente quempiam læsisse, neq; minimũ sibi quid arrogasse persuadeas, qui tuo permotus instinctu quicquid id est ac lubens effecerit. Aris. Omnes digne tibi plausuros arbitror, quos dubia hucusq; sententia detinuit. ex ueritate autem declarata odiũ tibi nasci tua non sinet modestia. Verum si opus fuerit tua iam nunc monita curabo satis. Vale.

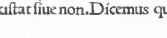
Ιωάννης ὁ γερμανὸς τοῦτον διάλογον
ἐν τῇ ἐνετίᾳ εὐτυχῶς ἐποίησε.

IOANNES GERMANVS PAVLO FLORENTINO ARtium & medicinæ doctori celebratissimo, ac Mathematicorum præstantissimo S. P. D.

NISI fidelem te mihi præstolarer iudicem atq; tutorē Paule optime, tam audax facinus, tamq; dubiū scribendi genus haud quaq; attentassem, siquidem nouam ac propriā tractantibus materiem, uix hac nostra tempestate satis parcitur, quin liuore quodā præter æquum & bonū perturbentur. Nam si quid paulo obscurius traditur, uel diminutæ scientiæ uel etiam ignorantiæ notam impingunt æmuli. Si uero dilucide ac scitissime unum aliquid pronunciaueris, furem te non scriptorē esse extemplo insimulant. At ego recens disciplinarum uersator, longe duriorem accepi prouinciam, quippe qui alienam retractare ausim materiem; plurimisq; modis inquisitā curui rectilineationem quibusdā medijs examinare decreuerim. Sed Deum testor immortalem, nullam unq; lacessendi libidinem mihi incessisse; nullis me pollicitationibus gloriæ inductum esse, quo confidentius id agerem. Veritas nāq; sola tantos mihi labores effecit iucundissimos; quos emendationi tuæ subiecisse non pudebit, quoniam qui id officij dignius in mundo accipiat reperio neminē. Habes profecto plenissimam Geometriæ cognitionem; habes expeditissimam numerorū peritiam, quibus absq; rebus sicut cōpleri non potuerūt hæc examina, ita neq; limabuntur; habebis, nisi me fallit animus, aliquando ocium literis alienis accōmodabile. Ingenium præterea tuum adeo mite & mansuetū perspexi, ut si quæ nimium prolixa, aut non satis lucubrata, uel forsitan inordinate dicta offenderis, immodeste tolerare atq; interpretari non possis, quod inde libentius te facturum arbitror, ubi hæc scripta mea breui admodū tempore absoluta perpenderis, lituris crebris primorum exemplarium id docentibus. Ne autem pluribus detinearis, ad rem ipsam propius accedendum censeo, ubi exemplo Archimedis in libello suo de mensuratione circuli non nisi lineis siue longitudine siue potentia rationalibus utendum erit. Solebat enim Archimedes, si qua linea potentialiter tantum rationalis occurrit, inter duas notas lineas longitudine rationales eam constituere; quem uirum inter oēs Mathematicos primarium imitatus ego quædam præambula huic negotio conscripsi necessaria, quo facilius cætera intelligerentur; neq; eadem sæpius q̃ decet repetere oporteret. Hoc igitur literale exercitiū, quod Venetijs peregrinanti mihi pauculos absumpsit dies, in manus tuas depono gratissimas limandū atq; tradendum, si placuerit ei uiro, cuius res agitur; nolim equidem in publicum prodeat, nisi primo tibi perspectum fuerit atq; iudicatum. Vale.

DEFINITIONES.

Quantitatem per se notam uocabimus, quam mensura aliqua famosa aut pro libito assumpta secundum numerum notum metitur. Terminus quantitatis cuiuslibet dicetur quantitas alia per se nota maior aut minor huiusmodi quātitate. Vt si b quantitas minor fuerit a quantitate, & c maior eadē, fueritq; utraq; quantitatum b & c per se nota, b & c dicentur termini quantitatis a, siue ipsa a quantitas per se nota existat siue non. Dicemus quoq; a quantitatem inter huiusmodi



terminos contineri. His demum communibus animi cōceptionibus utemur. Minus adiectum minori constituit minus, maius quoq; maiori adiunctū maius reddit, Subtractio minoris quantitatis ab alia quantacunq; maius relinquit ꝗ subtractio maioris ab eadem. hæ sententiæ sunt manifestissimæ.

PRAEAMBVLA.

I.

Si utraq; duarum quantitatum propositarum inter duos notos constituta fuerit terminos, congeries quoq; earum inter duos notos reperietur terminos.

Sint duæ quantitates a & b, inter binos terminos notos, a quidem inter c & d, b autem inter e & f, congregatisq; duabus quantitatibus a & b resultet g. Summa autem duarum c & e sit h, & congeries duarum quantitatum d & f sit k. Dico g quantitatem contineri inter duos terminos notos h & k. Cum enim c sit minor a, & e minor quantitate b, ex a autem & b coniunctis resultat g, erit per primam conceptionem h minor g, similiter ostendetur k maiorem esse g quantitate. Sic g quantitatis inter duos terminos h & k cōprehenditur, quos oportet esse notos per. 3. primi Triangulorum, quatuor quantitatibus c e d & f notis existentibus. Quòd si ad operationem accomodare uoluerimus, hoc præambulum numeros duorum terminorum minorum congregabimus, resultabit nanq; numerus termini minoris quæsitus, similiter numeros duorum terminorū maiorum colligemus pro maiori termino quæsito. Idem etiam tenebit, si plures ꝗ duo huiusmodi quantitatum obijcientur ordines. At si una quantitatū per se data fuerit, reliqua uero inter duos terminos notos habeatur, ipsa per se nota quantitas duarum uices quantitatum habebit: addita nanq; minori termino minorem, maiori autem adiecta maiorem constituet.

II.

Si fuerint duæ quantitates inæquales, quarum altera quidem inter duos notos terminos concludatur, altera uero per se nota existat, aut utraq; earū inter duos notos constituatur terminos: differentia quoq; earum inter duos notos habebitur terminos.

Duæ quantitates inæquales a & b inter binos notos constituantur terminos, a quidē maior inter c & d, b autem minor inter e & f: quarum quantitatum differentia sit g. Dico ꝙ & g quantitas inter duos notos consistet terminos. Cū enim e sit minor quantitate b, & b minor ipsa a, ac demum a minor d quantitate, erit & e minor d quantitate; differentia igitur duarū quantitatum e & d sit k. sit deniq; c quantitas maior f quantitate, aliter enim non concluderemus g inter duos notos terminos; differentiaq; duarum quantitatū f & c sit h: erit itaq; h minor g, nam b ex a dempta relinquit g differentiam, quare per communē scientiam secundam f quantitas maior ipsa b subtracta ex c minore ꝗ sit a relinquit h minorem g quanttiate. Item cū b ex a sublata relinquat g differentiā, per eandem communem scientiā e quantitas minor ipsa b subtracta ex d maiori ꝗ sit a, relinquit k differentiam maiorem g quantitate; sic g differentia inter duos



duos terminos h & k conſtituitur, quos quidem terminos notos eſſe oportet ex quarta primi triangulorũ, propter quatuor terminos c d e & ſ notos. Tenor autem operatiõis erit ille. Subtrahe minorem terminum minoris quantitatis ex maiori termino maioris quantitatis, & relinquetur maior terminus differentiæ, deinde ſubtrahe maiorem terminum minoris quantitatis ex minore termino maioris quantitatis, & relinquetur minor terminus differentiæ. Hactenus utraq; duarum quantitatum inter duos notos conſtitui terminos ſuppoſuimus, tanq; difficilius: nã ſi altera duarũ huiuſmodi quantitatum per ſe nota fuerit, facilius operabimur, dum enim maior earum per ſe nota exiſtet, ex ea ſubtrahemus maiorem terminũ minoris quantitatis, & relinquetur minor terminus differentiæ duarum propoſitarum quantitatum: minor autem terminus minoris quãtitatis demptus ex ipſa maiori quantitate per ſe nota, relinquet maiorem terminum differentiæ. Si uero minor quantitas per ſe nota fuerit, ſubtrahemus eam ſingulatim ex duobus terminis maioris quantitatis, & relinquentur duo termini differentiæ quos quærebamus. Horum omnium demonſtratio planiſſima eſt, immediate fermè ex communibus animi conceptionibus pendens. Exempla autem inferius occurrent plurima, rem hanc abunde declaratura.

III.

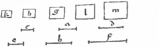
Si quis duas lineas inter binos terminos habuerit notos, quod ex ductu alterius earum in alteram naſcitur, inter duos quoq; notos terminos comprehendetur.

Sint duæ lineæ a & b, quarum altera quidem a duos terminos c minorem & d maiorem habeat: b autem linea e minorem & ſ maiorem. Dico ꝙ parallelogrammũ rectangulũ ex a in b inter notos duos conſiſtet terminos. Fiat enim ex a in b parallelogrammũ g: ex e autem in a fiat h: item ex e in c producatur k, deinde ex b in d fiat l, & ex ſ in d naſcatur m parallelogrammum. erit igitur per primam ſexti elementorum proportio k parallelogrammi ad h parallelogrammũ, ſicut lineæ c ad lineam b ſumpta c cõmuni altitudine duorum parallelogrammorũ k & h: ſed e linea minor eſt b, quare & k parallelogrammũ minus eſt parallelogrammo h. Similiter probabitur h parallelogrammũ minus ipſo g parallelogrammo ſumpta b communi altitudine duorum parallelogrammorum h & g, conſtat itaq; k parallelogrammũ minus eſſe parallelogrammo g. Non aliter probabimus parallelogtammũ m maius eſſe ipſo g parallelogrãmo, ſic g parallelogrammũ inter duos terminos k & m conſtituitur notos propter quatuor terminos c d e & f cognitos. 16. primi triangulorum arguente. Modus autem operãdi habebitur, ſi minores terminos in ſe, alterum uidelicet per alterum multiplicabimus, maiores quoq; duarum linearum terminos per ſeipſos, nam ex hac quidẽ multiplicatione minor, ex illa aũt maior terminus procreabit.

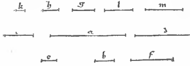
IIII.

Datis duabus quantitatibus ſingulatim inter duos terminos notos, quod ex diuiſione alterius per alteram elicietur, inter duos quoq; claudetur terminos notos.

Sint duæ



Sint duæ quantitates a & b, quarum utraq; inter duos terminos notos constituatur, a quidem inter duos c & d : b autem inter duos e & f, diuidendoq; a per b, exeat g, dico g quantitatem inter duos notos claudi terminos. Diuisa enim a quantitate per f, exeat h, per eandē quoq; diuisa c exeat k, erit k quantitas nota propter duos terminos f & c notos, minor quantitate g. Nam cū per diffinitionem diuisionis ex b in g, fiat a quantitas, quæ etiam fit ex h in f, erit per. 15. sexti, siue uigesimam septimi proportio b ad f sicut h ad g, sed b minor est f: quare & h minor erit ipsa g quantitate. Item cum ex f in h fiat a, ex eadem quoq; f in k fiat c, erit per primam sexti, aut per decimāoctauā septimi proportio c ad a sicut k ad h, sed c minor est a, quare & k minor est h quantitate: erat autem h minor g, unde & k multo minor erit ipsa g. Rursus diuisa quātitate a per e, exeat l, d autem diuisa per e, exeat m, erit ut prius proportio b ad e sicut l ad g, sed b maior est quantitate e: quare & l superabit ipsam g. Similiter proportio m ad l erit ut d ad a, cumq; d maior sit a, erit & m maior l, erat autem l maior g, quare multo maior erit m ipsa g quantitate. Sic igitur g quantitas inter duos terminos k & m collocabitur notos, propter quatuor terminos c d e & f cognitos. Tenor operationis talis habebitur: Diuide minorem terminum quantitatis diuidendæ per maiorem terminum quantitatis diuidentis, & exibit minor terminus quæsitus, item maiorem terminum quantitatis diuidendæ partiaris per minorem diuidētis, & exibit maior terminus quæsitus. Inter hos ergo terminos quantitas exiens continebitur. Solent autem nonnulli in multiplicationibus atq; diuisionibus quosdam habere scrupulos, mirum enim uidetur eis, ꝙ linea trium (uerbi gratia) pedum ducta in lineā quatuor pedum faciat superficiem duodecim pedum, cum linea quatuor pedum ter sumpta, non nisi linea duodecim pedum linealium coaceruetur. Duarū enim quantitatū alteram per alterā multiplicare non est aliud, nisi alteram earum toties sibi coaceruare, quoties in reliqua est unitas: multiplicatio nanq; quælibet additioni cuidam respondet siue æquipollet. Circa hoc considerandū est, ꝙ non cuilibet ductioni lineæ in lineā correspondet quædā multiplicatio, nam si lineæ in se ductæ fuerint incōmunicantes, altera quidem in alteram duci potest per diffinitionem eius, quod est lineam duci in lineam, nulla tamen multiplicatio habebit ibi locum: multiplicatio enim in numeris duntaxat reperitur, sed linearū incōmunicantium non est ut numerorū proportio. Cuilibet autem ductioni linearum cōmunicantium aliqua respondet multiplicatio: nam tales lineæ proportionem habent sicut numeri certi, imò ipsemet lineæ sunt numeri numerati, ex collectione mensuræ earum cōmunis resultantes, ut in exemplo. Duæ lineæ a b & b c in se ductæ, habeāt proportionem duorum numerorum tria & quatuor, a b quidem sit ut tria, id est mensura cōmunis sit ter in ea, b c autem ut quatuor, diuidaturq; a b in tres particulas æquales, & b c in quatuor, quæ signentur characteribus suis, ut in figura cernis, ducanturq; à punctis sectionum lineæ æquedistantes lateribus parallelogrammi a c, ita ut totum parallelogrammum resolutum habeatur in quadratella, quorum quodlibet à mensura communi describitur. Sicut ergo lineuncula b g est unitas linealis, ita quadratum



dratum suum b q est unitas superficialis, totq; unitatum superficialium est parallelogrammum b p, quot linealium linea b c per primam sexti elementorum. Similiter tot sunt unitates superficiales huiusmodi in parallelogrãmo b l, quot unitates lineales in latere suo a b. Cum deniq; quamlibet rem mundi pro unitate sumere liceat, quemadmodum in ueritate ipsa existit. Si sumpserimus parallelogrãmum b p tanq; unitatem, erunt tot tales unitates in toto parallelogrammo a c, quot sunt unitates lineales in latere suo a b, quod non ineptius dici potuit de parallelogrammis b l, g m, h n & k d æqualibus, unumquodq; enim eorũ toties est in superficie a c, quoties unitas linealis est in latere b c. Vno igitur & eodẽ charactere aut signo, siue uocali siue scripto scilicet. 4. significamus lineã b c superficiem b p, & superficiem b d, quælibet enim harũ quantitatum quatuor habet unitates. Similiter dicetur de latere a b & superficiebus ex eo surgentibus, oẽs enim ternario atq; eius caractere. 3. significãtur. Dum itaq; in hoc proposito multiplicantur quatuor unitates per tres, non intelligas unitatem linealem, sic enim nihil aliud q̃ linea resultaret: sed per unitatem de quatuor intellige quadratellum b q, per unitatẽ aũt de. 3. intellige superficiẽ b p; hæc igiť quæ est quatuor quadratella ter sumpta, constituet totam superficiem b d scilicet duodecim quadratellorum, hoc modo in reliquis omnibus multiplicationibus te expedias. Sed sint diuidenda. 12. per. 4. intellige. 12. quadratella, quotum unumquodq; describitur ab unitate lineali b c, per quatuor huiusmodi quadratella. Vnitas itaq; de. 12. est unum quadratellum huiusmodi, & similiter unitas de. 4. sed unitas de. 3. quæ per diuisionem exeunt, est superficies b p. Facta igitur diuisione, dicimus lineam a b esse trium unitatum, non q; unitas ternarij, qui per diuisionem exiuit, principaliter sit linea a e, aut alia sibi æqualis, sed superficies a o, quæ cum ter sit in tota superficie a c, necesse est lineam quoq; a e ter contineri in linea a b, & ad hunc modum in cæteris.

V.

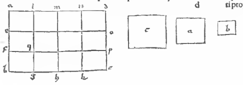
Lineæ duobus notis interiectæ terminis, quadratum quoq; inter duos notos concludetur.

Linea a inter duos terminos b & c notos contineatur, dico q; & quadratũ eius inter duos habebitur notos, describantur ex illis tribus lineis sua quadrata eisdem nominãda characteribus. per cõmunem itaq; scientiam sicut b linea minor est a, ita & b quadratum minus est a quadrato: quod & per primã sexti, si opus esset, ostendi posset, resecando uidelicet ex a linea æqualẽ ipsi b. similiter quadratum c maius declarabitur quadrato a. sic quadratum a inter duos terminos constituitur, notos quidẽ per primam primi Triangulorum. In operatione nihil difficultatis latet, si enim numerus terminorũ singulatim in seipsos multiplicaueris, habebis numeros terminorum quæsitorum.

VI.

Cuiuslibet quadrati per se cogniti, costa aut per se nota redditur, aut inter duos terminos notos cõpræhendi potest.

Si enim numerus huiusmodi quadrati quadratus est, radix eius costam quadra



ti propo

ti propositi manifestabit. Si uero numerus ille non fuerit quadratus, necessario cõtinebitur inter duos quadratos numeros sibi uicinos, quoꝝ radices notificabũt duos terminos costæ quadrati propositi. Vt si quadratum propositum fuerit 25. costa eius erit 5. Si uero quadratũ tale sit 28. cum numerus ille 28 circa se proximos habeat quadratos 25 & 36. quoꝝ radices sunt 5 & 6. erit costa quadrati 28. inter hos terminos 5 & 6. hæc oĩa sunt manifestissima, & demonstratione nõ egent.

VII.

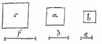
Si quadratum quodlibet inter duos terminos notos contineatur, costam quoqꝫ eius duobus notis terminis interponi.

Vt si quadratum a fuerit inter duos terminos notos, qui sint b & c, dico costam eius, quæ sit d distinctionis gratia inter duos terminos notos contineri. Sit enim e costa quadrati b, & f costa quadrati c, quas oportebit esse notas, si saltem numeri quadratoꝝ b & c quadrati fuerint. Costam autem d esse inter duas lineas e & f nemo dubitabit communi animi conceptione informatus. Sicut enim quadratum b minus est quadrato a, ita & costa eius minor ipsa costa d habebitur, similiter costa f maior eadem concipietur. Quòd si duo numeri quadrata b & c notificantes non fuerint quadrati, accipiendus est numerus quadratus proxime minor numero quadratum b notificante, & huius numeri radicem dabimus termino minori costæ d, sed pro termino maiori accipiendus est numerus quadratus proxime maior numero quadratum c notificante, huius radicem maiori termino costæ d accomodabimus. Qđ si alter duorum numerorum costæ d circumpositorum quadratus fuerit, alter autem non quadratus, utemur radice eius, qui quadratus est, pro uno termino: pro reliquo uero termino ut prius radicẽ numeri proximo minoris aut maioris assumemus, secundum quod res ipsa hortať.

VIII.

Si aliqua quantitas inter duos terminos notos comprehensa fuerit, quæcunqꝫ ad eam quantitatem habuerit datam proportionem, & ipsa inter duos terminos notos collocabitur.

Sit a quantitas inter duos terminos notos c minorem & d maiorem, quantitas autem b ad ipsam a proportionem habeat notam: dico ꝙ & b quantitas inter duos terminos notos collocabitur. Cum enim proportio a ad b sit cognita, ponamus ei æqualem proportionẽ c ad e, similiter proportio d ad f sit sicut a ad b, oportebit igitur b quantitatem comprehendi inter duos terminos e f, ita ꝙ e sit minor b, & f maior eadẽ: erãt aũt duo termini e & f noti ꝑpter proportionem a ad b notã cum utroqꝫ terminorum c & d. ꝙ autem e minor sit b & f maior eadem, sic constabit. Proportio c ad e est ut a ad b, & ideo permutatim c ad a sicut e ad b, sed c minor est a, igitur & e minor est b quantitate. Similiter permutando terminos duarum proportionum a ad b & d ad f, concludemus f esse maiorem quantitate b, quemadmodum d maior erat a quãtitate. Quantitas igitur b inter duos terminos notos constituetur, quod erat explanandum. Quo autem pacto duo termini e & f inueniantur, nemo hæc nostra scripta lecturus nescire debet, facile enim per legem quatuor numerorum proportionalium id





lium id absoluet, si productum ex multiplicatione consequentis proportionis notæ in utrumlibet duorum terminorum notorum diuiserit per antecedens proportionis notæ, exibit enim terminus minor secundæ quantitatis, si minorem primæ quantitatis multiplicabit, maior uero si maiorem. Quòd si per diuisionem huiusmodi numerus habens fractionem annexam, eliciatur, & libeat terminos secundæ quantitatis habere integros, abijcienda erit minutia, quæ circa minorem terminum secundæ quantitatis reperitur. Pro fractione autem, quam maior terminus habet, unitas integra adijciẽda erit, hoc enim pacto nouos terminos integros secundæ quantitatis extrahemus, quorum alter quidem minor erit eo, quem per opus quatuor numerorum proportionalium accepimus, reliquus autem maior erit eo, quem huiusmodi opus elicuit. Numeros autem exemplares, quoniam faciles sunt, prætereundos censui.

IX.

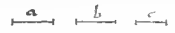
Si fuerint tres lineæ continuæ proportionales, quarum duæ quæcunq; inter binos terminos notos constituantur, reliqua quoq; inter duos notos terminos reperietur.

Sint tres huiusmodi lineæ a b & c, quarum duæ inter binos terminos notos consistant; dico ꝙ & reliqua duobus notis interiacebit terminis. Si enim duæ extremæ terminos habeant notos, erit per tertium præambulum, quod fit ex altera in alteram inter duos terminos notos, illud autem per. 16. sexti elementorũ æquatur quadrato mediæ lineæ; sic quadratum mediæ lineæ inter duos notos consistet terminos, & ideo per septimum præambulũ ipsa linea media duos terminos habebit cognitos. Si uero media linea fuerit inter duos terminos cognitos cum altera duarum extremarum, erit per quintum præambulũ quadratum lineæ mediæ inter duos terminos cognitos, quadratũ autem lineæ mediæ cum altera duarũ linearum extremarũ per uiam diuisionis suscitabunt reliquam extremã; cunq; utraq; illarum sit inter duos terminos cognitos, erit & per. 4. præambulum reliqua linea extrema inter duos terminos cognitos.

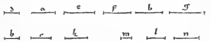
X.

Quatuor linearum proportionalium, si tres quælibet inter notos iaceant terminos, quartæ quoq; duos terminos notos suscitabimus.

Nam per. 15. sexti elementorum, quod sub secunda & tertia continetur, æquale est ei, quod sub prima & quarta: cognito igitur eo, quod sub secunda & tertia cõtinetur, mediante altera duarum extremarum, per uiam diuisionis cognoscitur reliqua: idem quoq; accidit, si quod ex prima & quarta fit, parallelogrãmum fuerit cognitum, ipsum enim per uiam diuisionis cum altera duarum mediarum cognita, reliquã suscitabit notam. In hoc igitur proposito nostro, aut ambæ extremæ inter notos consistunt terminos, aut ambæ mediæ. Si duæ extremæ inter notos iaceãt terminos, per tertium præambulũ, qđ ex ductu alterius in alterã fit, inter duos notos cõstituet̃ terminos, & ideo p. 4. præambulũ altera duarũ mediarũ inter notos existente terminos, reliqua quoq; duobus notis circundabit̃ terminis. Similiter si duæ mediæ inter notos cõsistant terminos, q̃d sub eis continet̃, inter notos habebitur terminos per tertium præambulum, cunq; altera duarum etiam extremarum inter duos notos existat terminos, erit per quartum præambulum secundum uiam diuisionis & reliqua extrema inter duos terminos cognitos. In exemplo; Sit a lineæ ad b proportio sicut c ad l, a autem inter d & e terminos, b



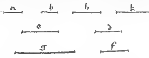
inter f & g, c inter h & k. multiplicabimus f minorem terminum secundæ in h minorem tertiæ, & productum diuidemus per e maiorem primæ, exibit enim minor terminus quartæ, qui sit m. Item g maiorem secundæ ducemus in k maiorem tertiæ, & productum diuidemus per d minorem primæ, sicq; exibit maior terminus quartæ qui sit n. Quantitas igitur l inter duos terminos m & n notos habebitur, quod erat absoluendum. Facilius autem id exequemur, si una talium quantitatum per se data fuerit, aut duæ etiam, utemur enim termino ipsius quantitatis per se datæ uice duorum terminorum. Vt si a quantitas per se data fuerit, b autem inter duos terminos, & c similiter inter duos, productum ex f in h diuidemus per numerum ipsius a quantitatis, & exibit m minor terminus quartæ quantitatis. Similiter productum ex g in h diuidemus per eundem numerū quātitatis a, & exibit n maior terminus quartæ, ita in cæteris. Rationes omniū dictorum ex tertio & quarto præambulis cum quintadecima sexti elementorum facile comparantur.



XI.

Si fuerint duæ quantitates, quarum proportio etsi ignota sit, inter duas tamen notas consistat, fueritq; altera duarum quantitatum per se data, reliqua quoq; inter duos notos continebitur terminos.

Sint duæ quantitates a & b, quarum proportio minor quidem sit data proportiōe d ad e, maior autem proportione f ad g; sitq; a quantitas per se data. Dico ꝙ b quantitas inter duos terminos notos comprehendet̃. Esto enim proportio a ad h sicut d ad e, proportio demum a ad k sicut f ad g, erit autem h quantitas nota, propter notam proportionem d ad e, atq; quantitatem a cognitam. Cum autem sit proportio d ad e sicut a ad h, proportio autem d ad e maior sit proportione a ad b, erit & proportio a ad h maior proportione a ad b, & ideo per decimam quinti h minor b quantitate. Similiter probabimus k maiorem eadem b quantitate, b igitur quantitas inter duos terminos notos constituitur, quod expectabatur declarandum. Operationē sic habebimus: Consequēs maioris duarum datarum proportionum multiplicabimus per quantitatem datam, & productum diuidemus per antecedens eiusdem maioris proportionis, exibit enim minor terminus secundæ quantitatis, deinde similiter consequens minoris datarum proportionum multiplicabimus per primam quantitatem, per se scilicet datam, & productum partiemur per antecedens eiusdē minoris proportiōis, & exibit terminus maior quæsitus. Ex commemoratis facile demonstrabuntur hæ duæ conclusiones, si duarum quantitatū utraq; inter duos terminos notos constituta fuerit, proportio quoq; earum inter duas notas claudetur proportiones. Item: Si duarum quantitatum proportio inter duas notas consistat proportiōes, quarum quantitatum altera inter duos notos comprehendatur terminos, reliqua quoq;



quoq; inter duos notos reperietur. Sed quoniam ad propositum nostrum nō sunt necessariæ scitu, silentio prætereundas censui.

XII.

Nunc ad primordia exercitij nostri propius ueniendo, certissimū pronunciamus, circumferentiam circuli esse eiusdem generis cum qua libet linea recta, imò omnes lineas, siue rectæ fuerint, siue curuæ, quali cunq; curuitate, non differre specifice.

Nam idem est principium generationis omnibus lineis cōmune, scilicet punctus, cuius fluxu siue motu imaginario lineas nasci prædicant Mathematici: eo enī fluente, per uiā breuissimā linea recta creař, per uiā aūt aliā curua generař. Similiter sentiendū est de supficiebus oībus, & itē de corpibus: sicut enī ex fluxu pūcti linea, ita ex motu lineæ supficies, & ex fluxu superficiei corpus cōficiť. Ad hāc rem cōfirmandā testimonia subsistunt plurimorū Geometrarū. Nonne Archimedes in principio primi de sphæra & cylindro demonstraturus congeriem laterum polygonij circulo circumscripti maiorē esse circuli circumferentia, assumit quaslibet duas rectas à punctis contactuū polygonij & circuli ad punctum unum concurrentes, esse maiores eo arcu, qui inter ipsa puncta contactuū intercipitur: maiores autem esse non possent, nisi de eodem genere quātitatis existerent; alias enim inter eas & arcum circuli non caderet proportio. Archimedes deniq; in de spiralibus lineis circumferentiæ circuli æqualem rectam inueniri posse supponit. Item in libello de mensuratione circuli eum triangulum rectangulum circulo æqualē esse demonstrat, cuius unum quidem latus rectum angulum ambiens semidiametro, reliquum uero circumferētiæ circuli æquale est, unde aperte sensisse dinoscitur Archimedes curuū & rectum lineale eiusdem esse generis. Ptolemæus quoq; in sexto libro magnæ compilationis suæ capitulo septimo, ubi ex digitis eclipticis linearibus superficiales conatur elicere, Archimedem imitatus, proportionem circumferentiæ circuli ad diametrum eius inter duas proportiones claudi notas enunciat: aream insuper circuli dimensurus, semidiametrum circuli in semicircumferentiā suam ducit, quam rem profecto imprudenter ageret, nisi eiusdem generis diametrum cum circumferentia circuli esse cognouisset. Sed & in libello trium fratrū talia supponuntur, ubi etiam demonstrandum proponitur cuiuslibet circuli circumferentiam ad diametrum suam eandem habere proportionem. Id autem præsupponit curuam circularem & rectam esse eiusdem generis: proportionem enim diffiniunt Geometræ duarum quantitatum eiusdem generis certam habitudinem. Quo uehementius admirādi sunt, qui nescio quibus territi somnijs, curui ad rectū inquiunt non esse proportionem. rogatiq; cur nam id fieri oporteat, respondent curuum & rectum non esse de eodem genere quantitatis, quæ res ꝙ temeraria sit, facile quisq; senserit. curuum reuera & rectum passionem quidem quantitatibus inferunt, genus autem non diuersificant. Hunc rumorē ortum esse arbitror ex uerbis Aristotelis in Prædicamentis, ubi ad tempus usq; suum neminem circuli quadraturam testatur inuenisse: circuli autem quadratura non uidetur possibilis, nisi doceatur quonam pacto circumferētiæ circuli æqualis recta describatur. Difficultatem igitur quam nonnulli impossibilitatem dicunt, quadrandi circulum ex difficultate, aut si uis dicere ex impossibilitate, circumferentiam rectificandi consurgit. Hanc autem impossibilitatem rectificandi circumferentiam circuli, siue æqualem ei rectam describendi clamitant inde euenire, ꝙ non sint eiusdem generis.

XIII.

Præterea non est ignorandum, circumferentiam circuli addere super triplum diametri suæ, minus quidem una septima eius, plus autẽ decem septuagesimis primis ipsius diametri.

Cuius rei certitudinem Archimedes in libello de mensuratione circuli manifestauit, numerorum fretus officio. Vtemur autem & nos penè simili ingenio numerorum in hoc nostro proposito, licentiam id faciendi ab Archimede sumentes. Neq; turbabit nos unq̃, q͂ plerisq; uisum est, ineptum siue impertinens linearũ habitudines per numeros inuestigare: nam in proposito nostro non nisi lineis rationalibus communicantibus utemur, quarum proportionem quinta decimi demonstrat esse ut numerorum. Quid quæso aliud suspicaris esse lineas, aut quantitates quasuis communicantes, nisi numeros ex coaceruatione mensuræ earum communis resultantes? Cur autem nonnullis in negocio linearum numeri suspecti sint, nisi me fallit animus, apertum dabo. Arabes olim circulum quadrare polliciti, ubi circumferentiæ suæ æqualem rectam descripsissent, hãc pronunciauere sententiã. Si circuli diameter fuerit ut unum circumferentia sua, erit radix quadrata de decem. Quæ quidem sententia, cum sit erronea, quemadmodũ alibi explanauimus, cumq; numeros rectilineationem effecturos introducat, numeri ipsi in hoc negocio suspecti habentur. Ex supra cõmemoratis trahitur, q͂ si diameter circuli diuisa fuerit in 497. particulas æquales, circumferẽtia circuli erit minor 1562. huiusmodi particulis, maior autem q̃ 1561. Similiter si semidiameter posita fuerit 497. particularum æqualiũ, semicircumferentia minor quidem erit linea recta cõplectente 1562. huiuscemodi particulas, maior autem linea recta habente 1561. tales particulas. Nam 1562. addunt super triplum de 497. unam septimã de ipsis 497. circũferentia autem circuli, ut præmissum est, minus addit. Item 1561 addunt super triplum de 497. decem septuagesimasprimas de 497. circumferentiam autẽ addere super triplum diametri, quæ ponitur 497. plus q̃ decem septuagesimasprimas, superius explanatum est. Non iniuria igitur dicemus circumferentiam circuli inter prædictos numeros existere, non quidem tanq̃ numerum, cum inter dictos numeros nullus cadat medius, sed tanq̃ maiorem minore eorum, & minorem maiore, ita q͂ addat supra minorem aliquam particulã unitatis, cuius particulæ quantitatem nemo usq; ad hodiernum diem didicit, sicut neq; comprehensum est circumferentiam esse communicãtem diametro, aut incommunnicãtem. Hoc suspicor etiã esse illud, quod plerosq; impulit dicere, curui ad rectum non esse proportionem: ubi enim non esse proportionem cognitam siue datam dicere debebant, simpliciter abnegauere proportionem, quasi non sit proportio aliqua non cognita siue nõ data, quales tamen multæ sunt. Sic ex genere proportionis ignoto proportionẽ nullam prorsus esse, falso putauerunt. Dictos itaq; numeros uocabo terminos circumferentiæ, q͂ inter eos quantitas circumferentiæ concludatur, quem loquendi morem in alijs similibus negocijs obseruatum ire decreui. Non autem solum illos sed quoslibet etiam numeros maiores maiore dictorum, & quoslibet minores minore eorũ, terminos appellabo. Nam si (uerbi gratia) circuli circumferentia est inter hos duos 1561. & 1562. erit etiam inter hos 1560. & 1563. & similiter de alijs. Quod autem de circumferentia circuli enunciauimus, ad omnes alias quantitates quibus binos huiusmodi terminos circumponimus, accomodandum erit.

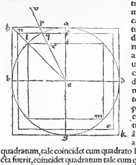
ὁ τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸς Νικόλεω τοῦ Κουσάνω ἐκδεδομένος. ἔστι δὲ οὗτος ὁ τετραγωνισμὸς ἄνευ εὐθείας ἴσης τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ διαγεγραμμένης καθάπερ ὁ Ἀρχιμήδης ἐποίησε. ἐπεὶ δὲ ἐκεῖνος οὐ φανερὰν προσφέρει τὴν ἀπόδειξιν, πειρασόμεθα τινὰ τρόπον εὑρεῖν τῆς ἀκριβείας αὐτοῦ ἢ τοὐναντίον. εἰ γὰρ ταύτῃ τῇ προτάσει παρακολουθεῖ τι ἀδύνατον, οὐκ ἔσθ᾽ ὅπως ἡ εὕρεσις καλὴ γενήσεται. εἰ δὲ μή, εἰς ἀπόδειξιν αὐτοῦ ἀναστρεπτέον.

ἀγαθῇ τύχῃ.

IN EDITIONEM DOMINI NICOlai de Cusa Cardinalis S.Petri ad Vincula, De quadratura circuli.

APud maiores nostros uetus iamdiu agitatum est problema, circulū propositum quadrare, breue quidem uerborum tenore, effectu autē ita arduum atq; inexplicabile, ut plurimis philosophis id absoluere tentantibus, tametsi diuersam quisq; pro modo ingenij sui eligeret uiam, spes omnis adempta sit, nemo autem eorū satis docte rem hanc tradidisse uidetur. Nam etsi Archimedes Syracusanus egregie atq; propinque ad metam hanc accesserit, adeo, ut uniuersos alios longe superasse credatᷓ, tamen quia utitur lineis spiralibus ad propositum suum, quarū descriptio difficilius fermē problema obijcit intellectui, q̄ ipsa circuli quadratura, uisum est plerisq; Archimedi huiusce problematis absolutionem haudquaq; constitisse. Adde q in hac re utitur linea recta contingente spiralem in prima reuolutiōe descriptam in termino suo: quod profecto obscurum atq; incertum factu est. Neq; mireris, q Archimedis in hoc negocio meminerim, de quo nihil scripsisse uidetur: quippe qui nulli librorum suorum de quadratura circuli titulum imposuit. Satis reuera hoc intendisse uidetur, dum circumferentiæ circuli æqualem rectam describere conatur, qua quidem descripta, nihil reliqui est, quod circulum quadrare prohibeat. Verum Archimedes ipse, quo pacto linea recta æqualis circumferentiæ circuli describeretur, nō tradidit, q̄uis hanc conclusionem enunciauerit. Si linea recta contingat spiralem in prima circulatiōe descriptam in termino eius, educaturq; recta ab initio spiralis, continēs angulum rectum cum linea, quæ circulationis existit, principium recta quæ ipsa contingente, & dicto circulationis principio intercipitur, circumferentiæ circuli æquabitur. Describere enim rectam æqualem circumferentiæ circuli præsupponit descripsisse lineam spiralem, eiq; contingentē applicuisse, quæ duo non minus profecto difficilia uidentur, q̄ circumferētiæ circuli æqualem rectam designare. Nonnulli tamen fuere, qui circulum quadrare tentarūt absq; descriptione præuia rectæ æqualis circumferentiæ circuli, quemadmodū Hippocras, cui per lunulas circulum quadrare conanti, Philopatris notam insufficientiæ impinxit, & quidem non iniuria. Hac demum tempestate nostra, uir quidam egregius circulo proposito æquale quadratum describere tentauit, similiter absq; designatione rectæ æqualis circumferentiæ circuli, sed lege quadam constituit quadratū medium inter duo quadrata, quorum alterum quidem circulo proposito circumscribitur, alterum uero eidem inscribitur, ita, ut circa diametros amborum consisteret, cuius intētionem q̄ paucissimis explicandam censui. Circulo a b g d super e centro descripto, circumscribatur quadratum h k, inscribaturq; quadratū l m, pro-

l m, productis duabus circuli diametris a g & b d, orthogonaliter se secãtibus ad rectos etiam lateribus dictorum quadratorum incidentibus, ducatur deinceps ex centro circuli linea e h per angulos quadratorum h & l, & item alia e u indefinitæ longitudinis ex parte u, cuius quidem terminus e semper adhæreat centro circuli e, ipsa uero linea intelligatur moueri à linea e h uersus lineam e a secando circumferentiam circuli; intelligatur insuper quadratũ, cuius latera æquedistent lateribus prædictorum quadratorum, unum autem eorum laterum transeat per punctũ sectionis prædictæ, in quo uidelicet linea e u secuit circumferentiã circuli; ipsum etiam quadratũ huiusmodi medium cõsistat circa diametros duorum quadratorum extremorum. Oportebit autem tale quadratũ necessario semper uariari, propter motũ lineæ e u circumferentiam circuli diuersimode secantis, ita ꝙ quanto magis recedet linea e u à linea e h, tanto magis habebitur, dum autem linea e u coincidit cum linea e h quadratum, tale coincidet cum quadrato l m, cum uero ad situm lineæ e a traducta fuerit, coincidet quadratum tale cum quadrato h k. Præterea linea e u secabit duo latera quadratorum h k & l m, contingitq; aliquando, ut duæ particulæ dictorum laterum interceptæ, duabus lineis e u & e a simul iunctæ, sint æquales medietati lateris quadrati medij, quod scilicet secundum motum lineæ e u uariatur. Nam quando linea e u iacet in situ lineæ e h, duæ lineæ h a & l t simul iunctæ, longiores sunt medietati lateris quadrati per punctum sectionis l transeuntis. Dum autem fuerit linea e u in situ lineæ e a, nihil inter duas lineas e u & e a intercipietur; sic ergo per motum lineæ e u à maiori transitur continue usq; ad non quantum, quare aliquando uentum est ad æquale; hoc, nisi me fallit opinio nemini dubium uidebitur. Sit itaq; nunc linea e u in tali situ, secans circumferentiam quidem circuli in puncto q, latera autem quadratorum h k & l m in punctis p & r, describaturq; quadratum n o, cuius unum latus incedat per punctũ q, eo pacto ut supra commemorauimus. Duæ autem lineæ p a & r t simul iunctæ, æquales sint ipsi lineæ n f, dimidio uidelicet lateri quadrati medij, quibus ita dispositis, prædicat philosophus ille quadratum n o æquari circulo a b g d. Qđ si ita esset, ingentes non iniuria haberemus huic inuentori gratias, ꝗuis nondum problema circuli quadrandi absolutum esset. Hæc namq; conclusio aliud præmitti sibi uellet problema, duo scilicet latera quadratorum extremorum, per lineam à centro circuli egredientem, sic secare, ut duæ particulæ p a & r t simul iunctæ, æquales essent dimidio lateri quadrati, quod per incisionem circumferentiæ in q puncto factam transit. Tale autem problema difficilem præ se fert absolutionem, unde licet uerum esset quadratũ medium sæpedictũ æquari circulo, dum duæ particulæ p a & r t coniunctæ, æquantur dimidio lateris quadrati n o, non tamen adhuc circulum quadrãdi facultatem nacti essemus. Circulum enim quadrare est aliquid operari, sed nihilo minus explorandum censeo, an uera sit hæc propositio, nã de problemate efficiundo posthac tacebo. Si ex centro circuli dati egrediatur



Propositio inuẽtoris.

linea

linea recta indefinitæ longitudinis, secans circumferentiã eius, itemq; latera qua-
dratorum circumscripti scilicet & inscripti ipsi circulo, quadratorum inquam cir-
ca eandem diametrum consistentium, sic ꝙ duæ portiones laterum prædictorum
quæ ab ipsa linea indefinitæ longitudinis, & semidiametro circuli orthogonaliter
lateribus quadratorum incidente, intercipiuntur, coniunctim sint æquales dimi-
dio lateri quadrati, quod per punctum incisionis circumferentiæ incedit, & circa
diametros prædictorum quadratorum consistit, tale quadratum medium æquale
circulo proposito habebitur. Hanc tamen propositionem facilius ex supra memo
ratis quisq; intelliget, ꝗ per longam uerborum seriem absq; characterum assigna-
tione. Exploraturus igitur quidnam ueritatis habeat hæc cõclusio, præmitto hãc
consequentiam bene ualere. Si duæ portiones p a & t r sunt æquales lineæ n ſ,
quadratum n o æquale est circulo a b g d, igitur si quadratum n o æquale est
circulo a b g d, duæ portiones p a & r t coniunctim sint æquales lineæ n ſ, ita
ꝙ alterum ex altero pendet, æqualitas uidelicet linearum p a & r t coniunctim
cum linea n ſ, ex æqualitate quadrati n o cum circulo a b g d. Nam si dixeris
æqualitatẽ cõgeriei linearũ p a & r t cũ linea n ſ, nõ sequi ad æqualitatẽ quadrati
n o cũ circulo a b g d. ponaẽ quadratũ n o æquale circulo a b g d, & cõgeries du
arũ linearũ p a & r t, maior (uerbi gratia) ipsa linea n ſ. Cũ aũt possibile sit tradu
cere lineã e u uersus e a, donec cõgeries linearũ p a & r t fiat æqualis lineæ n ſ,
nõ dico autem lineæ n ſ prius designatæ, sed ei, quæ designanda erit per nouã se
ctionem lineæ e u, & circumferentiæ circuli a b g d. illud enim quoties oportue
rit, repetendum uolo, ut transmota linea e u, quadratum quoq; n o uarietur, sic
ꝙ latus eius superius incedat per punctum circumferentiæ circuli, ubi eam lineæ
e u secabit. Procedente autem linea e u uersus lineam e a, duæ lineæ p a & r t
continue fiunt minores; linea autem n ſ continue maior, nam punctus sectionis
in circumferentia circuli propinquior erit ipsi puncto a, ꝗ antea fuerit. Sit ergo
iam transmota ad talem situm, ubi congeries duarum linearũ p a & r t sit æqua-
lis ipsi n ſ; erit ergo secundum te quadratum n o æquale ipsi circulo a b g d, sed
ponebatur quadratum n o primum æquale ipsi circulo; quare per communẽ sci-
entiam quadratum n o secundum æquabitur quadrato n o primo, totum parti,
quod est impossibile. Non aliter ad inconueniens redigemus aduersarium, si pro-
pter æqualitatem linearum p a & r t coniunctim sumptarum cum linea n ſ di-
xerit, quadratũ n o esse æquale circulo a b g d, nõ tñ econuerso, propter æquali
tatẽ quadrati n o, & circuli prædicti duas lineas p a & r t coniunctim sumptas,
æquales esse lineæ n ſ, sed minores ipsa linea n ſ. Nam transmota linea e u uer-
sus h, donec duæ lineæ p a & r t fiant æquales ipsi lineæ n ſ, nouiter ut supra
monuimus designandæ, erit ex tenore conclusionis supra memoratæ quadratum
n o secundum æquale circulo proposito. ponebatur autem & quadratum n o pri
mum æquale circulo; quare quadratum n o secundum æquabitur quadrato n o
primo, pars toti, quod est impossibile. Siue igiẽ uera sit propositio superius recita
ta siue non, consequentiam præfatam optime ualere oportebit, quod præterea am
plius confirmabitur hoc pacto. Quotiescunq; signatur quadratum circa diame-
tros quadrati h k, consistens æquale circulo proposito, latus eius superius secabit
circumferentiam circuli in eisdem semper punctis; aliàs enim facile cõcluderetur,
partem æqualem esse toti. Sit ergo, ꝙ propter duas lineas p a & r t coniunctim
æquales lineæ n ſ, quadratũ n o sit æquale circulo, ꝓposito, seceẽq; latus eius supe
rius circumferentiam circuli in puncto q, ita, ut tria puncta p q & r sint in linea
recta e u indefinitæ longitudinis, detur deinde quandocũq; libet quadratũ æqua-

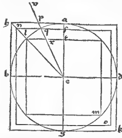
le circulo propofito, quod circa diametros quadrati h k confiftat: fecabit ergo iterum latus fuperius huiufmodi quadrati circumferentiam circuli in puncto q, producta'q; linea e u indefinitæ quantitatis per punctum q, fecabit duo latera fuperiora duorum quadratorum extremorum in punctis p & r, in quibus & prius fecuit: quare iterum duæ lineæ p a & r t coniunctæ, funt æquales lineæ n f. Sed quid in hac re manifeftiffima contero diem? ad principale negocium defcendere iubemur, quod ut & breuiffime atq; facillime abfoluatur, ponamus femidiametrū circuli propofiti 497. particularū æqualiū, erit ob hoc per 13. præambulū femicircumferentia memorati circuli inter hos duos notos terminos 1561 & 1562. maior quidem minore, minor autem maiore eorum. cumq; area circuli ex ductu femi diametri in femicircumferentiā nafcatur, quemadmodum Archimedes in libello de menfuratione circuli tradidit, & in libello trium fratrum habetur demonftratū erit per 3. præambulum area circuli inter duos terminos notos, qui funt 775817. & 776314. Sit deniq; quadratum n o æquale ipfi circulo, cuius latus fuperius fecet circumferentiam circuli in puncto q: educta'q; linea e u indefinitæ longitudinis per punctū fecet latus quadrati quidem circulo circumfcripti in puncto p, latus autem quadrati eidem infcripti in puncto r. Sit autem quadratum n o cōfiftens circa diametros quadrati h k, latus infuper quadrati n o fecet lineam e a in puncto f. Cum igitur quadratum n o fit æquale circulo a b g d, cuius areā inter duos terminos notos conclufimus, erit & area quadrati n o inter duos terminos notos: quare per 7. præambulum cofta fua inter duos notos reperietur, qui funt 880. & 882. & ideo per 8. præambulum medietas huius coftæ fcilicet linea n f, inter duos notos concludetur, qui funt prædicti termini dimidiati, fcilicet 440. & 441. Eft autem linea e f æqualis ipfi n f, unde & ipfa inter commemoratos habebitur terminos. Sed per penultimam primi elementorum quadratum e q. æquipollet duobus quadratis linearum e f & f q. quadratū aūt e q eft 247009. quadratum uero e f inter hos confiftit terminos 193954 $\frac{1}{4}$. & 194078 $\frac{1}{4}$. illud quidem per 8. præambulum: nam proportio quadrati n o ad quadratum lineæ e f, eft quadrupla, cum fuarum coftarum proportio fit dupla. Sunt autem duo termini, quos affignauimus fubquadrupli ad duos terminos quadrati n o. Igit quadrato lineæ e q per fe noto, & quadrato e f inter duos terminos notos exiftente, per 2. præambulum differentia eorum fcilicet quadratū q f inter duos terminos notos continebitur, qui erunt 52930. & 53055. quare & per 7. præambulum ipfa linea q f inter duos notos collocabitur terminos fcilicet 230. & 231. Rurfus quadratum e a ad quadratum e t eft duplum, nam quadratum e a æquatur quadrato e l, quod per penultimam primi elementorum duplum eft ad quadratum e t. Eft autem quadratum e a 247009. quadratum ergo e t erit 123504 $\frac{1}{2}$. numerus autem ille non habet radicem quadratam, fed quadratus proximo minor eo habet radicem 351. proximo autem maior eo quadratus radicem habet 352. quā obrem neceffario linea e t erit inter hos 351. & 352. Eft autem per quartam fexti elementorum e f ad f q ficut e a ad a p, quarum duæ quidem primæ inter binos terminos notos conftituūtur, tertia autem per fe nota eft: unde & per 10. præambulum quarta quoq; a p inter duos notos terminos concludetur, fcilicet 259. & 261. Amplius cum proportio e a ad a p fit ficut e r ad t r, quarū prima quidem per fe data eft, reliquæ uero duæ terminis circum fe pofitos habent notos, erit per 10 præambulū & linea t r inter duos notos, qui funt 182 & 185. fed nuperrime a p fuit inter duos notos collocata, quare & per primum præambulum congeries duarum linearum a p & t r inter duos terminos notos comprehendetur,

tur, scilicet 441 & 446. maior quidem minore existens & minor maiore. Superius autem didicimus lineam n s esse inter hos duos terminos 440 & 441. maiorẽ scilicet primo & minorem secundo. congeries igitur linearum a p & t r maior existens q̃ 441. multo maior erit ipsa linea n s. quare falsa est hæc hypothetica conditionalis: Si quadratum n o est æquale circulo a b g d. cõgeries quoq; linearum a p & t r æqualis est lineæ n s. Cumq; huiusmodi propositio per præmissam huius negotij inferatur ex illa: Si congeries linearũ a p & t r æqualis est lineæ n s, quadratum n o æquabitur circulo a b g d: ex uero autem non sequitur falsum: oportebit & dictam propositionem à ueritate recedere. Nondum ergo quadratũ æquale circulo proposito designare licebit, nisi prius rectam æqualem circumferentiæ circuli descripserimus. Quòd si libeat subiectum huius propositionis efficere, scilicet q̃ duæ lineæ a p & t r coniunctæ sint æquales lineæ n s. dimidiæ scilicet costæ quadrati per incisionem circumferentiæ modo sæpe dicto transeuntis, oportebit lineam e u transmoueri à situ pristino uersus a punctum. cũ ergo ad huiusmodi situm perueniet, ubi duæ dictæ lineæ a p & t r coniunctim sint æquales lineæ n s, quadratum n o creuisse interea constat. Quadratum autem n o primum ponebatur æquale circulo: quare quadratum n o secundum maius erit ipso circulo, tametsi congeries duarum linearum a p & t r æqualis sit lineæ n s in secundo situ lineæ e u. hinc iterum falsitas supra memoratæ conclusionis colligitur. Argumentationem autem, qua usus est in hoc suo proposito inuentor ille, nõ in prompto teneo, sicuti neq; alijs libellis meis uti iam licet in hac peregrinatione diuturna. Ne tamen solem Venetorum frustra mihi luxisse quispiam fortasse clamitet, has notulas ut inciderunt raptim conscribendas censui: quas quicũq; lecturus es, ueritati fauere potius, quàm Ioanni Germano succensere uelis: cui profecto non lacessendi, sed ueritatem cognoscendi cupido huiuscemodi periculum iniecit.

Venetijs die quinta Iulij, anno 1464.

τέλος τῶν περὶ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κατὰ Νικόλεων τὸν κουσαίων ἐν τῇ ὀυενετίᾳ εὐτυχῶς συντελουμένων.

Νικόλαος ὁ κουσάνος τὸν κύκλον τετραγωνίζειν βουλόμενος αὐτοῦ εὐθεῖαν ἴσην τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ, τοιοῦτο κατασκευάζει διάγραμμα. ἔχει δὲ ταύτῃ μέθοδος οὐδὲ ῥᾳδίαν οὐδὲ φανερὰν ἀπόδειξιν, διόπερ τῶν ἀριθμῶν ἀκολουθίᾳ πειράσομαι τοῦτο τὸ πρᾶγμα.



Circulus a b g d quadretur duabus diametris a g & b d, orthogonaliter se in centro e secātibus: circumscribatur huic circulo quadratum h k, circa cuius diametrum aliud quadratum existens l m eidē circulo inscriptū sit: intelligaturq́ linea e u ad centrum circuli terminata, ex alia autē parte indefinitæ longitudinis, hanc lineā imaginemur moueri ab h uersus a secando circumferentiā circuli a b g d, sitq́ tandem traducta ad eū situm ubi secet latera duorum quadratorum prædictorum in punctis p & r, circūferentiam autē in puncto q, describaturq́ quadratū n o, circa diametrum h k consistens, cuius unum latus per punctum q transeat, sit autē medietas huiusmodi lateris n s, ita quod duæ lineæ a p & t r coniunctim sint æquales lineæ n s. Diciturq́ quadratum n o sit æquale circulo a b g d. Id experiar lineis rationalibus intercedentibus.

Pone e a. 497.

1561. 1562.

Inter hos erit semicircūferentia b a d.

Quare per præambulū area circuli erit inter duos notos terminos, nā ipsa fit ex semidiametro in semicircumferentiam.

1561
497
10927
14049
6244
775817

minor terminus areæ circuli a b g d.

1562
497
10934
14058
6248
776314

maior terminus areæ circuli.

Inter hos etiam terminos erit area quadrati n o, & ideo per præamb. latus eius siue costa inter duos notos cōtinebitur.

51 | 8
1374 | 8
775817 | 0
1676
1

1
512 | 8
138953 | 8
776314 | 1
1676
1

880. 882.

Inter hos est costa quadrati n o.

Quare per præamb. medietas eius scilicet linea n s inter duos notos habebitur.

880. 882.

440. 441.

Inter hos erit linea n s.

cui æqualis est e s.

Quadratum autem e s demptū ex quadrato e q relinquit quadratū q s, & ideo per præamb.

quadra

quadratū q ſ inter duos notos habebitur.

```
   497
   497
  3479
 4473
1988
247009
```

quadratum e a.

Eſt autem quadratū n o quadruplū ad quadratū lineæ e ſ. coſta enī ſua ad lineam e ſ dupla eſt, ſed quadratum n o eſt inter duos notos, quare & per præambulū quadratū e ſ inter duos notos concludetur.

```
3131
7758817
1939541/4
```

minor terminus quadrā ti e ſ.

```
31    31
7763144
1940781/2
```

maior terminus quadra ti e ſ.

```
247009
194079
 52930
```

minor terminus quadra ti q ſ.

```
247009
193954
 53055
```

maior terminus quadra ti q s.

```
    1   |2
87930|3
  4 6  |0
   4

  111  |2
83055|3
  4 6  |0
   4
```

230 231

Inter hos eſt linea q ſ.

Eſt autem quadratū e a duplum ad quadratū e t nā e a æqualis eſt lineæ e t.

```
247009
1235041/2
```

quadratum e t.

```
  313  3|3
1235045|5
   670  |1
```

351 352

Inter hos eſt e t.

Sed proportio e ſ ad q s, eſt ſicut e a ad a p. cūq; duæ illarū inter terminos notos ſint, & tertia per ſe nota, erit per præambulum & quarta inter duos notos.

```
440    230
441    231
497

     497
     230
   14910
   994
  114310

     497
     231
     497
   1491
   994
  114807

    22
   364   |2
 1148076|6
 440000|0
   444
    4
```

```
      1
   2449
  36161|2
1143106|5
 44111|9
   444
    4
```

259 261

Inter hos eſt linea a p.

Similis proportio e ſ ad ſ q eſt, ut e t ad t r, quare iterum per præamb. t r inter duos notos concludetur. Item proportio e a ad a p ſicut e t ad t r. Hac ſecunda proportionalitate utar.

```
497    259
       261
351
352

     259
     351
     259
   1295
   777
   90909

   14
  265
 4946
81245|1
90909|8
49777|2
  499
   4

     352
     261
     352
   2112
   704
   91872
```

4
8
2 4 2
4 2 9 8
5 2 2 2 4 | 1
9 2 8 7 2 | 8
4 9 7 7 7 | 4
4 9 9
4

182 185
Inter hos eſt t r.

259 261
Inter hos erat a p.

441 446
Inter hos erit cõgeries ex a p & t r

440 441
Inter hos erat n s.
Congeries itaq; linearũ a p & t r maior eſt ꝙ 441. Linea autem n s minor ꝙ 441, quare cõgeries linearum a p & t r multo maior erit linea n s. Hoc autem pacto argumentabimur Tu ponendo congeriẽ linearũ a p & t r eſſe æqualem lineæ n s, nã hoc eſt poſſibile, aſſeris quadratũ n o æquari circulo propoſito, ſed dũ quadratũ n o æquatur circulo dicto, congeries linearũ a p & t r nõ eſt æqualis lineæ n s, ergo ſi congeries linearũ a p & t r eſt æqualis lineæ n s, ipſa congeries dicta nõ eſt æqualis lineæ n s quod eſt impoſſibile.

Eſt & alia uia directi us id examinandi.

Ponamus ſemidiametrũ e a. 4970. unde per demonſtrata Archimedis ſemicircũferentia b a d, erit inter hos 15610 & 15620. ductaq; ſemidiametro e a in utrunq; horum terminorũ, producẽtur duo termini, inter quos neceſſario continebitur area circuli. & ſunt iſti 77581700 & 77631400. hæc ex priori bus cõputans facile trahuntur.

Nunc ponatur congeries linearum a p & t r æqualis lineæ n s, ſiue e s. dico autem, ꝙ linea a p neceſſario erit inter hos terminos 2578 & 2586. Nam ſi poſueris a p. 2578. erit cõgeries ex a p & t r minor ipſa n s. multo igitur minor eſſet, ſi poneres a p minorem ꝙ 2578. Item ſi poſueris a p 2586. erit dicta congeries maior ipſa n s. multo igitur maior eſſet ſi poneres eã maiorem ꝙ 2586. Primum ſic oſtendetur.

Eſto a p primus 2578.

	2578
	2578
	20624
	18046
	12890
	5156
	6646084
quadratum a p.	
24700900.	
quadratum e a.	
24700900	
6646084	
31346984	
quadratum e p.	

2 3
2 9 9 4 8 | 5
6 2 9 8 8 4 | 5
2 3 4 6 9 8 4 | 0
2 0 2 0 1 8 | 8
2 1 1

5598. 5599.
Inter hos eſt e p.

Eſt autem proportio e p ad e a, ſicut q e ſiue e a ad e s. & ideo e a. eſt medio loco proportionalis inter p e & e a.

5598. 4970.
5599.
497.

3
4 7
9 8
2 8 3 1
2 6 8 4 2 | 4
2 3 4 4 3 2 1 | 4
2 4 7 0 0 9 0 0 | 1
5 5 9 9 9 9 9 | 1
5 5 9 9 9
5 5 5
5.

2
3
2 4 5
6 9 7 2 | 4
2 7 2 8 4 | 4
2 3 4 8 7 2 4 | 1
2 4 7 0 0 9 0 0 | 2
5 5 9 8 8 8 8
5 5 9 9 9
5 5 5
5

4411. 4413.
Inter hos eſt e s ſiue n s ei æqualis.
24700900.
12350450.
quadratum e t.

25 | 3
3432374 | 5
4235045 0 | 1
87002 | 4
7

3514. 3515.

Inter hos est e t.

Proportio autem e a ad a p est ut e t ad t r. quare per præam. t r erit inter duos notos.

4970. 2578.
3514.
3515.

3514
2578
28112
24598
17570
7028
9059092

43
35
4437
48558 | 1
548365 | 8
9059092 | 2
49700000 | 2
49777
499
4

9059092
2578
9061670

41
34
4463
48778 | 1
549526 | 8
906467 0 | 2
4970777 | 3
4979
44
4

1822. 1824.

Inter hos erit t r.

2578. 2578.

4400. 4402.

Inter hos habebitur congeries linearũ a p & t r

4411. 4413.

Inter hos erat n s.

Congeries igitur ex a p & t r minor est q̃ 4402, & ideo multo minor q̃ 4411. Sed linea n s maior est quàm 4411. quare congeries dicta minor est q̃ linea n s. multo igitur minor esset si poneres a p minorem q̃ 2578. sic enim decresceret congeries ex a p & t r: linea autẽ n s cresceret.

Ponamus nunc a p 2586.

2586
2586
15516
20688
12930
5172
6687396

quadratum a p.

24700900

31388296

quadratum e p.

5 | 5
6 268 2 | 6
34388296 | 0
404420 | 2
411

5602. 5603.

Inter hos erit e p.

Vtar per omnia syllogismis pristinis,

5602. 4970.
5603.
4970.

16
2577
2392482 | 4
247009000 | 4
5602424 2 | 0
56009 | 9
566
5

28
2479 | 4
2388776 | 4
247009000 | 0
5603333 | 8
56000
566
5

4408. 4410.

Inter hos est e s siue n s

4970. 2586.

3524.
3515.

2586
3514
10344
2586
12930
7758
9087204

42
69
444
49936 | 1
544484 | 8
908772 04 | 2
49700000 | 8
49777
499
4

9087204
2586
9089790

1 4
4 5
6 2
1 4 4 6
9 9 5 1 | 1
4 1 1 3 3 3 | 8
9 0 8 9 7 9 0 | 2
4 9 7 7 7 7 | 8
4 9 9 9
4 4

1828. 1829.

Inter hos est t r.

2586. 2586.

4414. 4415.

Inter hos erit congeries ex a p & t r.

4408. 4410.

Inter hos erat n s.

Cum itaq; congeries ex a p & t r sit maior q̃ 4414. erit multo maior q̃ 4410. Lineaautẽ n s est minor q̃ 4410. quare congeries ex a p & t r maior est q̃ linea n s. multo igitur maior fiet si linea a p maior statueretur q̃ 2586. nam sic cresceret congeries ex a p & t r, linea autẽ n s decresceret.

Concluditur ergo lineã a p necessario reperiri inter hos 2578 & 2586. dum cõgeries ex a p & t r est æqualis ipsi n s.

Nunc quod reliquũ est absoluamus.

2578. 2586.

Inter hos est a p.

Horũ quadrati proximo superius eliciti sunt hi. 6646084. 6687396.

24700900
6646084
31346984

minor terminus quadrati e p.

24700900
6687396
31388296

maior terminus quadrati e p.

Hos numeros hic repeto, ut omnes in parato habeantur, q̃uis etiam superius expressi sint.

1 3
1 9948 | 5
61 9884 | 5
31 3 4 6 9 8 4 | 9
1 0 1 0 1 8 | 8
1 1

5
6 2 6 8 2 | 5
3 1 3 8 8 2 9 6 | 6
1 0 1 2 2 0 | 0
1 1 1 2

5598. 5602.

Inter hos erit linea e p.

Est autẽ e a medio loco proportionalis inter e p & e s. quare per præcedentem inter duos notos habebitur.

5598.
5602. 4970.
4970.

2
3
1 4 5
6 9 7 2
1 7 2 8 4 | 4
2 3 4 8 7 2 4 | 4
2 4 7 0 0 9 0 0 | 1
5 5 9 8 8 8 8 | 2
5 5 9 9 9
5 5 5
5

16
2 5 7 7 | 4
2 3 9 2 1 8 2 | 4
4 7 0 0 9 0 0 | 0
5 6 0 2 2 2 2 | 9
5 6 0 0 0
5 6 6
5

4409. 4413.

Inter hos erit e s siue n s æqualis ei.

4409. 4413.

8818. 8826.

Inter hos erit costa quadrati n o, erat enim n s medietas dictæ costæ.

8818
8818
70544
8818
70544
70544
77757124

minor terminus quadrati n o.

8826
8826
52956
17652
70608
70608
77898276

maior terminus quadrati n o.

Superius autẽ area circuli erat inter hos, 7758 1700. & 7763 1400. Quadratum ergo n o maius est q̃ 77757124. & ideo multo maius q̃ 7763 1400. sed area circuli minor est quàm 7763 1400. quamobrem quadratũ n o maius est circulo a h g d, dũ congeries ex a p & t r æqualis est

qualis est lineæ, nisi quod est contrarium enunciationi recitatæ. Quo autē pacto concluserim lineam a p esse oportere inter prædictos rerminos, longū esset enarrare: & fortasse obscurum uideretur, paucis enim admodū artē Algebræ, siue rei & census satis cognitam scio, qua quidē arte hoc in negocio usus sum. Satis tamē erit unicuiqꝫ uidisse ea, quæ hactenus tractauimus: sic etenim negare non poterit lineā a p inter dictos claudi terminos, dū congeries ex a p & t r æqualis est lineæ n s. De hoc finem facio.

Venetijs die .27. Iunij. Anno 1464.

Ἐπαινῶμεν τὸν θεὸν τὸν σωτῆρα ἡμῶν, ὃς οὐ μόνον τὴν ζητουμένην ἀλήθειαν ἀποκαλύπτει, ἀλλὰ καὶ τὸ ψεῦδος ἀποφαίνει.

ALIVD EXAMEN SVPERIO ris editionis.

SEd repetenti mihi parumper negotiū istud, neqꝫ quiescenti prius quam directiorē modum id explorandi reperiam, aliud iter monstratum est: quod literis mandare constitui. Principio igirur hoc certissimum prædico, quod si duas lineas a p & t r æquales lineæ n s habere uoluerimus, necesse est lineā a p contineri inter hos duos terminos 2578. & 2586. dum semidiameter e a est 4970. particulæ. Quo autem pacto hos duos terminos inuestigauerim, longū esset enarrare, & ualde arduū, nisi doctissimus in Algebra existeres. Vt tamē prædicta ostendantur esse uera, quam paucissimis numeris utemur. Esto prius linea a p 2578. & semidiamerer e a 4970. quadratū e a duplū est quadrato e t; sed quadratū e a est 24700900. unde quadratum e t erit 12350450. hic numerus non habet radicem quadratam, sed radix quadrati proximo minoris est 3514. & proximo maioris 3515. quare necessario linea e t erit inter hos duos terminos 3514 & 3515. Est autem proportio e a ad a p, sicut e t ad t r, quare cum primæ duæ sint per se notæ, tertia autem inter duos terminos notos erit per 10. præambulū. & linea t r inter duos notos, qui sunt 1822. & 1824. unde & per primum præambulū congeries duarum linearum a p & t r inter duos terminos notos habebitur, scilicet 4400. & 4402. Deinde quoniā quadratum lineæ e p duobus quadratis linearum e a & a p notarum æquipollet, erit & quadratum ipsius e p cognitum, scilicet 31346984. hic autem numerus radice quadrara caret, radix tamē quadrati minoris eo proxime est 5598. & radix quadrari maioris eo est 5599. quare linea e p necessario continebit inrer hos duos terminos 5598 & 5599. Est autem proportio lineæ p e ad e a sicut q e ad e s similitudine triangulorū p e a & q e s ratiocinante, & q e æqualis est ipsi e a, quare linea e a est medio loco proportionalis inter duas lineas p e & e s, atqꝫ idcirco per 16. sexti quadratū lineæ e a æquabitur ei quod fit ex p e in e s. per 9. ergo præambulū, ut breuis sim, linea e s inter duos terminos complectetur cognitos, qui sunt 4411. & 4413. linea aurem e s æquatur lineæ n s, quæ est dimidia costa quadrati per incisionem circūferentiæ q tran-

ſeuntis. Linea igitur n ſ maior eſt ꝙ 4411. & ideo multo maior ꝙ 4402. congeries autem linearum a p & t r minor erat ꝙ 4402. Dum ergo linea a p eſt 2578. congeries linearum a p & t r minor eſt ipſa linea n ſ. & ideo neceſſe erit lineam a p maiorem eſſe ꝙ 2578. ſi congeries duarū linearum a p & t r debebit eſſe æqualis ipſi n ſ. Nam ſi poneres lineam a p minorem ꝙ 2578. fieret dicta congeries ex a p & t r multo minor ꝙ linea n ſ. quanto enim linea a p abbreuiatur, tanto linea n ſ maior redditur. Conſtat itaqꝫ ꝙ lineam a p maiorē eſſe oporteat ꝙ 2578. ad hoc ut congeries ex a p & t r æqualis ſit ipſi lineæ n ſ. Quod autē lineam a p minorem eſſe oporteat ꝙ 2586. ſimili ingenio lucubrabimus, erit enī ut prius linea e t inter hos duos 3514. & 3515. & ideo per 10. præambulū linea t r hos duos terminos 1828. & 1829. comprehendetur: hinc per primū præambulū congeries ex a p & t r inter hos terminos 4414. & 4415 conſtituetur. Rurſus quadratum lineæ p e innoteſcet propter duas lineas e a & a p cognitas, erit enim tantū 31388296. ſed hic numerus radicem quadratam non habet, minor tamen eo proximus quadratus radicem habet 5602. quare linea p e continebitˢ inter hos terminos 5602. & 5603. Sed quemadmodum ſupra oſtendimus, linea e a medio loco proportionalis eſt inter p e & e s: unde quadratum lineæ e a cum ipſa linea p e notam ſuſcitabūt lineam e s. ſed lineæ quidem e a quadratum per ſe notum eſt. p e autem linea inter duos terminos notos iacet: quare & per 9 præāb. linea e s inter duos terminos notos habebitur, qui ſunt 4408. & 44010. ſed linea e s æquatur ipſi n s, quare & linea n s inter eoſdem concludetur terminos, minor ſcilicet exiſtens ꝙ 4410. & ideo multo minor ꝙ 4414. erat autem congeries linearum a p & t r maior ꝙ 4414. Quando ergo linea a p 2586. particulas habebit, quales e a habet 4970. congeries linearū a p & t r maior eſt ꝙ linea n s. quare neceſſe eſt lineam a p minorem eſſe ꝙ 2586. ſi congeries ex a p & t r debet eſſe æqualis lineæ n s. nam ſi poſueris eam maiorem ꝙ 2586. erit dicta congeries multo maior ꝙ linea n s. quanto enim linea a p prolongatur tanto breuior linea n s efficitur. Ad ſummā igitur huc uſqꝫ concluſimus lineam a p eſſe inter hos terminos 2578. & 2586. quādo ſaltem congeries ex a p & t r æqualis eſt ipſi n s. Nunc quorſū hæc tendant ne fruſtra diem contriuiſſe uidear, ꝙ pauciſſimis abſoluam. Cum linea a p ſit inter duos terminos notos, & linea e a ſit per ſe nota: quadrata autem dictarū linearum æquipolleāt quadrato lineæ e p, erit per 1. & 7. præambula linea p e inter duos terminos cognitos, ſcilicet 5598. & 5603. hos autem numeros ex ſupra cōputatis collegimus. eſt deniqꝫ e a medio loco proportionalis inter p e & e s, ut etiam prius cōmemoratum eſt. ſed quadratum e a per ſe notum eſt, & linea p e iam inter duos notos habebatur: quare per 9. præambulum linea e s & ideo n s æqualis ei inter duos notos conſtituetur terminos, qui ſūt 4408. & 4413. inter quorū quadratos per 5. præambulū continebitur quadratum lineæ n s, qui ſunt 19430464. & 19474569. eſt autem quadratū n o quadruplum quadrato lineæ n s: coſta nāqꝫ eius dupla eſt ad lineā n s: illud per 18. ſexti uel per 4. ſecundi elementorum: cūqꝫ quadratum lineæ n s ſit inter duos terminos notos, erit & per 8. præambulū quadratum n o inter duos terminos cognitos, qui ſunt 77721856. & 77898276. Dum autem ſemidiameter e a eſt 4970. ſemicircumferentia circuli a b g d per .13. præambulum inter hos terminos collocabitur 15610. & 15620. quare & per .3. præambulum area circuli huius erit inter terminos notos, qui ſunt 77581700. & 77631400. ſic

area

area circuli minor erit q̃ 7763 1400: & ideo multo minor q̃ 7772 1856. sed quadratũ n o maius erat q̃ 7772 1856. unde necessario area circuli minor erit quadrato n o. Igitur ut ad primordia huius negocij reuertamur, dum congeries linearum a p & t r æqualis est lineæ n s, area circuli a b g d, minor est quadrato n o: quod quidem repugnat conclusioni superius memoratæ. reliquũ ergo quisq; ueritatis amator concludere potest. Habes tandem ò lector syncere directiorem huius negocij lucubrationem, quam si numeros tibi obediẽtes reddideris, librare, limare, postremo etiam si ratio iusserit reprehendere licebit. Velim tamen ita tranquille Ioannis Germani scripta suscipias, ut modeste is sese rem hanc contrectasse arbitratur. Nam si more quorundã paulo uehementius in eos strideret, qui gloriam nondum effectæ rei sibi usurpant, aut ingenium suũ insolentius ostentant, tunc & maxime odio habendus esset, quippe qui uel erranti, quod humanum est, non daret ueniam: uel iuste forsitan redarguendo non compateretur: præsertim cum morbus ille familiaris quem dulcedo gloriæ parit, neminem non tangat mortalium. Quicquid igitũ hac in re effectum est, ueritati iubenti potius q̃ obsequenti scriptori non iniuria tribuendum erit.

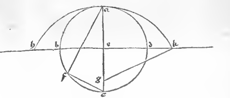
Venetijs die sexta Iulij. 1464.

τέλος τοῦ ἑτέρου πειρασμοῦ εἰς τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸν Νικολάου τοῦ κυσανοῦ ἐκδεδομένου.

IN EDITIONEM EIVSDEM, QVO pacto semicircumferentiæ circuli æqualis designetur recta.

Georgius ille doctissimus Mathematicorũ præceptor olim meus quandam curui rectificationem breuem admodũ mihi obiecit ac factu expeditissimam, cui principio quidem plurimũ fidei habui autoritate inuentoris persuadente: ubi uero pro acumine ingenij sui inuentum huiusmodi examinare cœpit, nam demonstrationem nusq̃ cõperit, longe aliter q̃ ratus erat accidere didicit: lineam enim rectam, quam inuentor ille prædicauit æqualem semicircũferentiæ circuli, multo minorem eadem semicircumferentia conclusit: modus tamen Georgij acutissimi, quem huic negocio discutiendo accomodauit, memoriam reliquisse uidetur meam: si tamen is est, quem inferius exponam, non pudebit unquam aliena scripta retractare, quo recentior ad memoriam redeat imago præceptoris. Sententiam igitur inuentoris in primis recitandam censui. Sit circulus a b c d super centro e descriptus, quem duæ diametri suæ a c & b d quadrẽt: educaturq; altera earum b d utrinq; ad longitudinem indefinitam. latus trianguli æquilateri inscriptibilis huic circulo sit a f, cui ponatur æqualis a g: super g itaq; facto centro secundum distantiam g a circulus describatur, cuius circumferentia secet diametrum b d ut supra utrinq; prolongatã in punctis h & k. Dicitur lineam rectam h k æqualẽ esse semicircũferentiæ b a d: unde & duplã eius toti circumferentiæ circuli a b g d æquari oportebit. Hãc

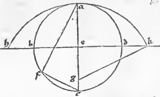
conclusionem nulla demonstratione firmatam uideo, quare more meo experiar per lineas rationales, quid sequatur si talis dispositio subijciatur, qualem hæc conclusio præsupponit. Continuabo duo puncta g & k per lineam g k, ducta etiam in circulo corda f c, quæ erit latus exagoni circulo proposito inscriptibilis. Si igitur posuerimus semidiametrum e a 497. particularum æqualium erit per. 13. præambulum semicircumferentia b a d inter hos duos terminos 1561. & 1562. Linea autem a f scilicet latus trianguli æquilateri circulo inscriptibilis potentialiter triplat semidiametrum circuli, quemadmodum ex trigesima tertij uel octaua tertijdecimi & penultima primi elementorum concluditur. Sed quadratum semidiametri est 247009. quare quadratum a f erit 741027. hic autem numerus radicem quadratam non habet. minor tamen eo proxime quadratus hanc habet radicem. 860. & proximo maior eo habet. 861. quamobrem necessario corda a f repetietur inter hos duos terminos 860, & 861. erat autem a g æqualis ipsi a f, quare & a g inter eosdem continebitur terminos. Cumque semidiameter e a per se nota sit, erit per. 2. præambulum linea e g residua inter duos terminos cognitos, qui sunt 363. & 364. Iam consequenter ad quantitatem lineæ e k ueniendum est. Quoniam e g inter duos notos concluditur terminos, erit per. 5. præambulum & quadratum eius inter duos terminos notos, qui sunt 131769. & 132496. sed erat quadratum g k per se notum; est enim g k æqualis cordæ a f, quadratum autem g k per penultimam primi duobus quadratis linearum e g & e k æquipollet: per. 2. præambulum igitur quadratum e k inter notos terminos habebitur, qui sunt 608531. & 609258. & ideo per. 7. præambulum ipsa quoque linea e k inter duos notos habebitur, scilicet 780. & 781. Hinc tandem per. 8. præambulum tota h k dupla ipsi e k inter duos comprehendetur terminos notos, qui sunt 1560. & 1562. erat autem circumferentia circuli inter hos 1561. & 1562. & idcirco etiam inter hos 1560. & 1562. quicquid enim maius est maiore, maius quoque minore existet. Vnde non possum non mirari quo nam pacto ad uerum ita propinque accesserit inuentor ille, ut inter binos terminos lineæ h k & semicircumferentiæ b a d non nisi unica particula intersit. Veruntamen nondum certitudo apparet huius sententiæ, sicut neque incertitudinem comprehendere potuimus. Nam etsi inter hos duos terminos 1560 & 1562. contineatur tam linea h k quam semicircumferentia b a d, in tanto tamen interuallo infinitæ quantitates inæquales intercidere possunt. Id autem euenire palam est propter grossiciem particularum 497. quas semidiametro e a tribuimus. Vt igitur animo nostro quietem comparemus, ponatur denuo semidiameter e a 4970. particularum, quo demum fit, ut semicircumferentia b a d inter bos duos terminos reperiatur 15610 & 15620. præambulo. 13. id edocente. quadratum itaque semidiametri e a erit 24700900. quemadmodum ex superiori computo elicitur. sicut etiam terminos fecimus decuplos, ita multiplicationes eorum centuplas fieri oportet. Triplum autem huius est 74102700. & tantum erit quadratum cordæ a f syllogismo priori resumpto. quadratum enim lateris trianguli æquilateri circulo inscripti quadrato semidiametri eiusdem circuli triplum fore demonstratum est



tum est. Numerus autem ille radicem quadratam tiō habet, uerum mitior eo proximus quadratus radicem habet 8608. maior autem habet 8609. quāobrē corda a f inter hos duos termiōs reperietur 8608. & 8609. & inter eosdem quoq; linea a g habebitur. unde per. 2. præābulum residua e g continebitur inter illos. 3638 & 3639. & ideo per. 5. præābulū, eius quadratū inter hos duos reperietur 13235044. & 13242321. quadratum autem e g demptū ex quadrato g k relinquit quadratū e k, per penultimā primi elementorum. atq; id circo per. 2. præambulum duo termini noti quadratū e k circundabūt qui sunt 60860379. & 60867656. & ex. 7. præambulo ipsa linea e k inter duos noros comprehendetur terminos, uidelicet 7801. & 7802. Vtide & rota h k dupla ad ipsam e k duos terminos circa se positos habebit notos, qui sunt 15602. & 15604. Linea itaq; h k minor est q̄ 15604. atq; idcirco multo minor q̄ 15610. sed semicircūferentia b a d ex supra cōmemoratis maior erat q̄ 15610. quare linea h k multo minor erit quàm semicircumferentia circuli b a d. Nō est igitur linea h k æqualis semicircumferentiæ circuli b a c, cuius contrarium inuentor ille asserebat. Quantum autem ueritati & opinioni inuentoris inierſit nemo satis docere poterit. nondum enim semicircumferentiæ b a d neq; ipsius etiam lineæ rectæ h k longitudo mensurata est, rametsi utraq; earū duobus terminis notis interiaceat. Verum differentia huiusmodi necessario maior erit sex particulis, quales 4970. semidiametro a e dedimus, minor autem decemocto huiusce modi particulis, erat enim semicircumferentia b a d maior q̄ 15610. sed 15610. superauit 15604. in sex particulis. quare semicircumferentia b a d excedit 15604. in pluri q̄ sex particulis. amplius 15604. superant lineam rectam h k, excessu quamuis ignoto. manifestum igitur est, excessū semicircumferentiæ b a d ad rectam h k maiorē esse sex dictis particulis. Præterea cum recta h k maior sit q̄ 15602. & semicircumferentia b a d minor q̄ 15620: differentia autem terminorum commemoratorū est 18. constat differentiā semicircumferentiæ b a d & rectæ h k minorem esse decemocto dictis particulis. Prope igitur ad metā accessit uir ille, quamuis medio frueretur facillimo, non tamen idcirco satisfecit intellectui ueritatem magis q̄ propinquitatem inuestiganti. nam si ad meram ipsam propinquius etiam q̄ Archimedes ueniendi fuerit libido, uiam in promptu habemus, ab Archimede sumptā. qui quemadmodum proportionem circumferentiæ ad diametrū conclusit inter duas, scilicet triplam, sesquiseptimam, & triplam superpartientē decem septuagesimas primas: ita inter duas proportiones multo itter se uiciniores eandē constituere poterimus circumferentiæ ad diametrum proportionē. sed in hoc non quiescit animus, cum recta æqualis circumferentiæ circuli nō sit data. atq; idcirco spes omnis circulum quadrandi adempta. Si qui ergo siue modernorū siue posterorum huius rei gloriam uenari uelint, curuæ lineæ rectificandæ uel circuli quadrandi problema sibi nouiter obiectum habent, q̄uis plurimi quidē uetustissimi philosophi id aggressi sint, nemo autem Archimedem in hoc philosophandi genere usq; ad hodiernū diem superauerit, admirandus profecto esset, qui tantū tamq; inexplicabile curui & recti discrimen rumperet: alterutrū in alterum commutandi facultatem traderet: is enim maiores nostros uniuersos ingenio suo, præsertim in Geometricis exercitijs, longe anteuenire crederetur.

Venetijs die octaua Iulij. Anno 1464.

Νικόλαος ὁ Κουσαῖος
ἐπιχειρεῖ διαγεγράφαι εὐθεῖαν ἴσην τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ.



Sit circulus a b c d supra centro e descriptus, quem duæ suæ diametri a c & b d quadrent, educaturq; altera earum b d utrinq; ad longitudinem indefinitam: latus trianguli æquilateri inscriptibilis huic circulo sit a f, cui ponatur æqualis a g: super g itaq; facto centro secundū distantiam g a, circulus describatur, cuius circumferentia secet diametrum b d, ut supra utrinq; prolongatam in punctis h & k. Dicitur lineam rectam h k æqualem esse semicircumferentiæ b a d: unde & duplam eius toti circumferentiæ circuli a b g d æquari oportebit.

Hanc conclusionē nulla demonstratione firmatam uideo, quare more meo experiar per lineas rationales, quid sequatur, si talis dispositio subijciatur qua lem hæc conclusio præsupponit. Ex puncto itaq; g ad k, producta recta g k æquali ipsi g a, pono semidiametrum e a 497. particularum &c.

$3\frac{10}{7}$ $3\frac{1}{7}$
$\frac{22}{7}$ $\frac{223}{71}$

22 | 497
154 |

1562. 1561.

Inter hos erit semicircū ferentia b a c necessario.

Linea autē a f, scilicet latus triāguli æquilateri potentialiter triplat semidiametrū circuli a b c

497.
Linea e a siue f c.

497
497
2479
4473
1988
347009
quadratum e a.

247009
3
741027
quadratum a f.

1 | 8
1454 | 6
741027 | 0
1672
1

860. 861.

Inter hos est a f siue a g ei æqualis.

Quare per præamb. e g inter duos notos erit.

860, 861.
497. 497.
363. 364.

Inter hos erit e g.

Quadratum autem g k notum (est enim g k æqualis lateri triāguli) æquipollet duob. quadratis e g & e k. & e g iam inter duos notos habet, quare per & præābula e k inter duos notos continebitur.

363
363
1089
2178
1089
131769
quadratum minoris termini e g.

364
364
1456
2184
1092
132496
quadratum maioris ter-

mini e g.

741027.
quadratum g k.

741027
132496

608531
minor terminus quadrati e k.

741027
131769

609258
maior terminus quadrati e k.

3
1161 | 7
6088311 | 8
1456 | 0
1

3
1178 | 7
6097258 | 8
1456 | 0
1

780. 781.
Inter hos est e k.

Quare per præamb. dupla sua, scilicet h k inter duos continebit notos.

780. 781.
780. 781.

1560. 1562.
Inter hos est linea h k.

1561. 1562.
Inter hos erat semicircũferentia b a c.

Nullum igitur inconueniens adhuc apparet, nã si semicircumferẽtia est inter hos 1561. & 1562. erit quoq; inter hos 1560. & 1562.

Sed pono semidiametrum e a 4970. & ideo semicircumferẽtia b a c erit inter hos 15610. & 15620.

24700900.
tantum erit quadratum semidiametri e a.

74102700.
quadratum a f.

165
145461368 | 8
74102700 | 6
16 20 | 0
7 2 | 8
17
1

8608. 8609
Inter hos erit a f.

4970. 4970.

3638. 3639.
Inter hos erit e g.

3638
3638
29104
10914
21828
10914
13235044
quadratum minoris termini e g.

3639
3639
32751
10917
21834
10917
13242321
quadratum maioris termini e g.

13235044
74102700
quadratum g k

74102700
13242321

60860379
minor terminus quadrati e k.

74102700
13235044

60867656
maior terminus quadrati e k.

3 14 | 7
1162578 8 | 8
6086037 79 | 0
145660 | 1
1 5
1

3 1
11622 5 | 7
60867656 | 8
145660 | 0
1 5 | 1
1

7801. 7802.
Inter hos est e k.

7801. 7802.

15602. 15604.
Inter hos est h k.

15610. 15620.
Inter hos est semicircũferentia b a d.

Linea itaq; h k minor est q̃ 15604. & ideo minor q̃ 15610. sed semicircumferentia b a d maior est q̃ 15610. quare linea h k multo minor est semicircumferentia b a d. cuius contrarium affirmat conclusio.

Venetijs die 26. Iunij. Anno Christi 1464. Nona die ab exitu sũmi põtificis de urbe Romana, ituri contra Teucros. Deus bene uortat.

ἀγαθῇ τύχῃ.

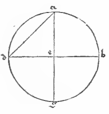
IN EDITIONEM EIVSDEM, QVO nam pacto triangulus æquilaterus describatur, ambitũ habens æqualem circumferentiæ circuli dati. hæc nempe inuento circumferentiæ circuli dati æqualem rectã, atq; deinceps ipsi circulo æquale quadratũ designare facile esset.

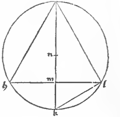
SI quisq; est, quem studium philosophiæ celebrem reddere, aut mathematicarũ decus æternitati cõsecrare debuit, præsertim hac nostra tẽpestate, unicus es inter Italos Paule Florẽtine tãto dignus munere: quippe qui disciplinas oẽs adeo egregie tenes, ut cũ Archimede, uictoriam propemodum habiturus, certare uidearis. te philosophia ex alumno docili professorẽ doctissimum reddidit: neq; unq̃ qui euisses, uirorum optime, nisi post medicinam summopere percognitam, literas græcas didicisses, quo ingenij tui uim abundiorẽ ostenderes, & si quid somnolento interprete latinitati ineptius forsitã redditum è greco offenderes, ipse limare ac demum cæteros docere posses. Igitur Nicolao Cusano sancti Petri aduincula cardinali, episcopo Brixineñ. uiro in omnibus scibilibus profundissimo, cuius ingenium magis diuinum q̃ humanum apud omnes nostræ ætatis homines reputatur, hæc tua excellentia adeo perspecta est & probata, ut familiaritatis suæ maximum participem te faceret: quod equidẽ ex dialogo quodam circumferentiæ circuli rectificandæ compertum habeo: ubi personas colloquentes Nicolaum & Paulum offendo. quem quidem dialogum nuper legẽti mihi, tanta & tam suauis iniecta est animi uoluptas, ut nunq̃ ea maiorem in Mathematicis studijs senserim. Platonem enim ipsum in dialogo scribere solitũ uidere uidebar: ipsa deniq; materies multis quidẽ iamdudum celeberrimis quæsita ingenijs, mihi aũt cognitu desiderũtissima, animũ supra modũ affecit: & eo uehemẽtius, q̃ tantæ autoritatis uiros haberet tractatores. Sed iterũ atq; iterũ relegentẽ nũq̃ me defatigauit ille dialogus, quinimo pmaxime placuit. interea tamen scrupulus quidã crebro mihi obijciebatur. Nã etsi solidã enunciationi fidem haberem autoritate tantorũ uirorum permotus, tamen pro consuetudine mea feruorẽ animi scire cupientis magis q̃ credere, haudquaq; sedare potui, nisi argumentatio quædã demonstratiua redderetur: ratio eni quã dialogus ille habebat, sicuti non plene intelligebatur, ita neq; animo satisfaciebat. quæ res tandem effecit ut inuentum illud penitus negligerem; nihil lectu dignum arbitratus, in Geometricis potissimum: quod non demonstratione roboratur. Nunc autem in urbe Venetorum existenti mihi, forte in mentem redijt huiuscemodi inuentio: uerum argumentatio sua non occurrit, quam in exemplo commemorati dialogi uidebã. quamobrem decreui explorare, an hæc dicta inuentio circumferentiæ rectificandæ consonet demonstratis Archimedis, aut ei in aliquo repugnet. nam si consonabit, non poterit ullo pacto repræhendi, cum Archimedem in nulla unq̃ re defecisse constet. si autem repugnabit, quod reliquum est, facile quisq; concludere poterit. Tenorem autẽ inuentionis sæpe dictæ, sub forma conclusionis talis, exprimendum censui. Si ex semidiametro circuli dati atq; corda quadrantis eius, directe in longũ coniunctis diametrum alteri circulo constituerimus: triangulus æquilaterus eidem alteri circulo inscriptus, circulo dato æque circummensurabitur. Sed exemplari figurati-

guratione lucidius id fiet. Circulus a b g d datus, quadretur duobus diametris a g & b d in centro eius e se secantibus, ductaq; corda quadrantis a d, exponatur 3 k recta æqualis duabus e d, scilicet semidiametro circuli a b g d & a d cordæ quadrantis circumferentiæ. deinde 3 k per medium diuidatur in puncto n, super quo facto centro secundum distantiã n 3 describatur circulus 3 b k l, cui demum inscribatur triangulus æquilaterus 3 h l. Dicitur huiusmodi triangulum esse æquecircummensuratũ circulo a b g d: id est tres lineas eius laterales coniunctim æquales circũferentiæ circuli a b g d. Quod si uerum esset, quis nesciret circumferentiæ circuli dati æqualem rectam designare, atq; deinceps circulũ ipsum quadrare? Huius igitur negocij prosequẽdi gratia, ponam semidiametrum a e circuli dati 497. particularum: erit itaq; semicircumferentia b a d, per 13. præambulũ inter hos duos terminos 1561. & 1562. & ideo tota circumferẽtia a b g d, inter hos duos 3122. & 3124. Quadratum autem cordæ a d, duplum est quadrato semidiametri a e, penultima primi id arguente. sed quadratum a e est 247009: quadratum ergo a d erit 494018. Hic autem numerus caret radice quadrata: proximus tamẽ minor eo quadratus radicem habet 702. & maior eo quadratus radicem habet 703. quare corda a d inter hos duos terminos continebit, qui sunt 702. & 703. & ideo per præambulum 2. congeries duarum rectarum a e & a d, inter duos notos comprǽhendet terminos, qui sunt 1199. & 1200. quadratũ ergo diametri 3 k inter duos notos continebitur terminos, qui sunt 1437601. & 1440000. Est autem quadratum diametri 3 k sesquitertium quadrato lateris trianguli æquilateri inscripti circulo suo: quod facile confiteberis, si in circulo 3 h k l cordã k l protraxeris: quæ erit latus exagoni inscriptibilis circulo 3 h k l, semidiametro; ipsius circuli æquabitur. erit enim angulus k l 3 rectus, & ideo quadratũ 3 k, duobus quadratis linearum 3 l & l k æquale erit. cumq; ipsum sit quadruplum quadrato k l: est enim 3 k dupla ad ipsam k l: erit & quadratũ 3 k sesquitertium quadrato 3 l, scilicet lateris trianguli æquilateri circulo inscripti. sed quadratum 3 k erat inter duos terminos notos: quare per 8. præambulũ, quadratum 3 l inter duos notos continebitur terminos, qui sunt 1078200. & 1080000. & ideo per 7. præambulum, ipsa linea 3 l inter hos duos notos constituetur terminos 1038. & 1040. totus autem ambitus trianguli 3 h l triplus est ad lineam 3 l. Per 8. ergo præambulũ, totus ille ambitus inter duos notos comprǽhendetur terminos, qui sunt 3114. & 3120. ambitus itaq; trianguli 3 h l minor est q̃ 3120. quare & multo minor q̃ 3122. erat autem circumferentia circuli a b g d, ut supra conclusimus, maior q̃ 3122. quo circa manifestum est, circumferentiam circuli a b g d maiorẽ esse ambitu trianguli a b g d. & ideo ipse triangulus 3 h l, non æquecircummensuratur circulo a b g d dato, cuius contrariũ supra memorata conclusio enunciabat. Non consonat itaq; hæc conclusio demonstratis Archimedis, sed discrepat. differentia tamen inter ueritatem & opinionem inuentoris, maior est duabus particulis, quales 497. sunt, in semidiametro a e circuli dati, & minor decem huiusmodi particulis. minor enim terminus circumferentiæ circuli a b g d, excedit maiorem terminũ ambitus trianguli in duabus huiusmodi particulis. & ideo circumferentia circuli a b g d, excedit ambitũ trianguli in pluri q̃ duabus huiuscemodi particulis. Itẽ maior terminus circumferentiæ circuli a b g d, excedit minorem terminũ ambitus trianguli in decem huiusmodi particulis: quare circumferentia circuli a b g d necessario excedit ipsum ambitũ dicti trianguli in minori, q̃ decẽ huiusmodi

modi particulis. Habes tandem ô Paule doctissime, breue huius inuentionis examen, quod si unquam oculis tuis obiectum fuerit, pro mansuetudine tua legere uelis ac existimare. nihil enim unquam proferre ausim, quod iudicio tuo æquissimo non foret confirmatum. Quod si rationem meã iudicaris efficacem, tibi gloriam tribuendam censeo, qui singularis ac obseruandus mihi haberis præceptor: si uero inualidam aut forsitan nullam prædicaueris, id mihi lucro erit inuenisse, qui errores meos aperte atque fideliter emendet, uirum integerrimũ: quod genus hominũ hisce nostris temporibus perrarũ existit, adeo ista secta Gnatonica inoleuit, quæ & mores quosque optimos interimit, & leges maiorũ nostrorũ funditus euertit. Sed ne distantius egrediar, ualere te iubeo.

Venetijs die nona Iulij. 1464.





Νικόλεως ὁ κουσαῖος πειρασάμενος κύκλῳ τῷ δοθέντι ἰσοπερίμετρον ἀποδοῦναι τρίγωνον ἰσόπλευρον εὐθύγραμμον οὕτως πορεύεται, ὁ τοιοῦτος δὲ οὐκ ἀρκούντως τῆς ἀποδείξεως δεῖ· ἐκ τῶν τῶν γραμμῶν εὐθειῶν ῥητῶν τὸ πρᾶγμα συμπλέκω. Ἰωάννης ὁ γερμανός.

CIrculus a b g d quadretur duabus diametris a g & b d in centro eius e se secantibus, ductaque corda quadrantis a d, exponatur ʒ k recta æqualis duabus e d, scilicet semidiametro circuli a b g d & a d cordæ quadrãtis. deinde ʒ k per medium diuidatur in n puncto, quo facto centro secundũ distantiam n ʒ, describatur circulus ʒ h k l, cui inscribatur triangulus æquilaterus ʒ h l. Dicitur huiusmodi triangulum esse isoperimetrũ circulo a b g d: idest tres lineas eius laterales coniunctim æquales circumferentiæ circuli a b g d. Hæc enunciatio quoniam demonstrationem manifestã non habet, per lineas rationales pulchre examinabitur.

ponatur

ponatur ā e semidiameter 497. particularum.

1561. 1562.

Inter hos erit semicircũferentia b a d.

1561. 1562.

3122. 3124.

Inter hos erit tota circũferentia circuli a b g d.

497
497

3479
4473
1988

247009

quadratum a e.

Est autem quadratũ a d duplum quadrato a e.

247009
247009

494018

quadratum a d.

1
22 4|7
494018|0
14 0|2
14

702. 703.

Inter hos erit corda a d.

Quare per præamb. cõgeries duarũ a e & a d, inter duos notos cõtinebitur terminos.

702. 703.
497. 497.

1199. 1200.

inter hos erit cogeries linearum a e & a d, siue tota 3 k.

Et ideo per præamb. lineæ 3 k quadratum inter duos notos compræhendetur terminos.

1199
1199

110791
10791
1199
1199

1437601

minor terminus quadrati 3 k.

1200
1200

240000
12

1440000

maior terminus quadrati 3 k.

Est autem quadratũ 3 k sesquitertium quadrato 3 l, quare & per præam. quadratum 3 l inter duos notos concludetur.

2 1
1437601
359400 $\frac{1}{4}$

1078200 $\frac{3}{4}$

minor terminus quadrati 3 l.

2
1440000
360000

1080000

maior terminus quadrati 3 l.

4
1187|1
29169|0
1080000|3
22006|9
2

7
185|1
17326|0
1078200|3
22006|8
2

1038. 1040.

Inter hos est linea 3 l.

Perimeter autem trianguli 3 h l, tripla est ad lineam 3 l. quare per præamb. & ipsa perimeter inter duos terminos notos habebitur.

1038. 1040.
3 3

3114. 3120.

Inter hos erit perimeter trianguli 3 h l.

3122. 3124.

Inter hos erat circumferentia circuli a b g d.

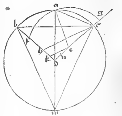
Perimeter itaq; trianguli minor est $\overline{q}$ 3120. & ideo multo minor $\overline{q}$ 3122. circumferentia autem circuli maior est $\overline{q}$ 3122. quare perimet' trianguli non est æqualis circumferentiæ circuli a b g d, cuius contrarium asserebatur.

Venetijs 26. Iunij, 1464.

IN EDITIONEM EIVSDEM, QVO modo spaciū reperiatur æquilaterum & æquiangulum, cuius ambitus circumferentiæ circuli dati sit æqualis: quod iterum ad curui rectificationē circuliq; quadraturā conferret, si bene traditum esset.

SAepe & multum ipse mecum recensui, atq; admiratus sum uehementer, tantam tamq; inexplicabilem curui & recti distantiam, ut nemo ad hunc usq; diem satis aperte tradiderit, quo pacto alterum ex altero nasceretur, præsertim in lineis: quibus tantum discrimen propter curuitatem & rectitudinem interiectū est, ut neq; ex recta linea curuam, neq; curuæ propositæ æqualem rectā constituere possimus. qua de re factum esse arbitror, ut post multas ueterum uigilias, ac uarios curuum rectificandi modos, Archimedes tandē permotus sit excogitare quoddam medium, utroq; extremorum, uidelicet curuo & recto participans, exemplum trahens à transmutationibus naturalibus, ubi de extremo ad extremum nunq; transitur, nisi intercesserit quoddam mediū, cum quo extrema ipsa transmutanda communitatem quandam habeant. Natiuitas autem lineæ rectæ fit per motum puncti breuissimū, curua uero linea circularis ex fluxu puncti cuiuslibet a puncto centrali in motu suo æquedistantis nascitur. Hos igitur duos motus, rectum uidelicet & circularem Archimedes commiscens, motum quendā promiscuum adinuenit, & per eum motum quandā lineam mediā inter rectū & curuū constituit, quam spiralem appellauit, cuius quidē lineæ officio curuæ circulari æqualem rectam designare conatus est. sed sicuti modū producendi hanc lineam non tradidit nisi per imaginationem, ita neq; contingentem rectā ei applicare in puncto quolibet docuit: quæ res necessariæ sunt ad hoc, ut curuæ circulari æqualē rectā designemus. Vnde nō iniuria quispiā dicere ausit Archimedem curuæ circulari nunq; æqualem rectam designasse: quippe qui contingentem rectam spirali lineæ applicare nusq; docuerit. Quis enim, ut ex primordijs Geometriæ exempla sumamus, à puncto quolibet dato lineæ rectæ propositæ æqualem rectā produceret, nisi prius triangulum æquilaterū super lineam datam collocare sciret? Nemo deniq; angulo plano rectilineo æqualē redderet angulum, si prius tribus lineis rectis propositis, quarum quælibet duæ tertia reliqua maiores sunt, ex tribus alijs eis æqualibus triangulū constituere didicisset. Ingentes nihilominus Archimedi habendæ sunt gratiæ, qui tot & tātis tamq; subtilibus inuentis Geometricis posteritatem adornauit, ut sempiternum inde monimentū haud indigne nactus sit: qui profecto rem hanc plenius edidisset, nisi importuno milite Marci Marcelli Syracusas obsidentis, spiritum cœlo reddidisset. ò ingenium uiri acutissimum. ò uigilias & labores perennes, quos in Geometricis studijs ad mortem usq; pertulit philosophus ille celeberrimus. Quis unq; dignum aliquid tantis sudoribus rependet? Quem non miserebit huius hoīs, qui cariora duxit posteritatis ornamenta publica q̄ uitā propriam? cui minime pepercit, ut maximum Geometriæ thesaurum posteris congereret. Occurrit demum illud inter omnia opera sua admiratione dignissimū, q̄ superficiem planam curuilineā in planam rectilineā uertere docuerit, nullo medio intercedēte, quod curui & recti naturā cōiter saperet. demonstrauit enī sectionem coni parabolam esse sesquitertiam triāgulo rectilineo, qui basim haberet

beret communem cum ipsa sectione parabola & altitudinem eandem, quamobrem facile redditur ipsi parabolæ sectioni æqualem rectilineam designare superficiē. Sic in transmutandis superficiebus uir ille acutissimus iter præbuit, quod in lineis inuentu erat difficillimum. Nolim tamen quispiam mihi succenseat, ꝙ superius dixerim, Archimedē curuæ circulari æqualem rectam non descripsisse, atq; idcirco quadraturam circuli nunq; attigisse: ipse enim de seipso id confiteri uidetur, ubi in libello de mensuratione circuli curuæ circulari æqualem fermè, non tamen præcise rectam designare docet: officio numerorū concludens proportionem circumferentiæ circuli ad diametrū eius inter duas consistere proportiones: quem quidem libellum post lineas spirales scripsisse creditur: ut saltem propinque ad uerum quomodolibet accederet, quandoquidē æqualē curuæ circulari rectam in ueritate consequi non posset. ad metam enī si prope conieceris sagittam, tametsi punctum non tangas, haud inglorius habeberis. Hoc igitur curui rectificandi problema, ad nostræ ætatis uiros tandē deuolutum est quasi intentatum & nemine unq; satis absolutū: soluendi tamē spes atq; possibilitas, ægregium quendam hisce nostris diebus uirū inuasit, qui multos quidē alios modos id efficiendi tradidit faciles & absq; motu linearum fiendos: hunc uero difficilē & per motus linearum docuit absoluendum, cuius tenorem hoc in loco explicandū censui. Esto circulus propositus a b c super centro d descriptus, à cuius diametro a m æque uelociter moueri intelligantē duæ semidiametri d b & d c, hæc quidem uersus dextram, illa autem uersus sinistrā; iāq; sint transmotæ ad eū sitū, ubi b & c puncta æqualiter ab a puncto distent; ductáq; corda a c & linea a e ei æquali, super puncto e facto centro secundum quantitatem e a describatur circulus, cuius circumferentia secet semidiametrū quidem d b in puncto f, d c autem continuatā in g, ita ut d f sit subdupla ad d g. Dicitur ꝙ triangulus æquilaterus inscriptus circulo habenti semidiametrum d g, æquecircummensuretur circulo a b c. (.i. habeat ambitū æqualem circumferentiæ circuli a b m c.) Ponitur autem d f subdupla ad ipsam d g ob hanc causam. Nam si eidem circulo unum quidem inscripseris, alium uero circumscripseris triangulum æquilaterū, perpendicularis quæ ex centro circuli ad latus trianguli inscripti ducitur, subdupla est ad eam, quæ ex centro circuli ad latus circumscripti protrahitur perpendicularem. Quod si libeat quadratum æquecircummensurabile circulo a b c designare, secundum intentionē huius inuentoris, dispositis cæteris ut antea, sit proportio lineæ d f ad lineā d g, sicut perpendicularis ductæ ex centro circuli cuiuscunq; ad latus quadrati eidem circulo inscripti, ad perpendicularem ductam ex centro talis circuli ad latus quadrati eidem circūscripti. Similiē de pentagono reliquisq; figuris æquilateris ac æquiangulis intelligendum est. Quamuis autem modus iste pulcher admodum uideatur, ꝙ ad omnes figuras æquilateras & æquiangulas accomodari possit, nullam tamen eius demonstrationē ostēdo, qua id roborari possit, quod p



cum exponitur. At si uera esset hæc sententia inuentoris, nondum circumferē
tiæ circuli æqualem rectam designare possemus, nisi prius subiectum huius cō
clusionis prædisponere sciremus, difficile enim & nequaq̃ absolutum est, quo
pacto duæ semidiametri d b & d c sic elongent̃ æque uelo[illegible]er à puncto a,
ut dispositis cæteris, quemadmodū supra commemorauim[illegible], linea d f sit sub
dupla ad ipsam d g. Illud autē prius efficiendū erit, q̃ circulari curuæ æqualē
rectā assignemus, problema itaq̃ curuæ circularis rectificandæ, ex alio proble
mate prius absoluendo, pendere dinoscitur. Sed eo prætermisso, ad sententiā
inuentoris supra recitatā ueniendum censeo, atq̃ explorandū, consonet ne de-
monstratis Archimedis an nō. Hic igit̃ diu ac summopere laboranti mihi (diffi
cile nanq̃ erat modū hunc examinare, propter motum linearum qui in eo sup
ponitur) tandem uia comprahensa est consequendi intentum. Sit itaq̃ secun
dum mentem inuentoris, linea d f subdupla ad lineam d g, & ob hoc trian-
gulus æquilaterus inscriptus circulo habenti semidiametrum d g, æquecircū
mensuratus circulo a b c; ponatur'q̃ semidiameter a d 60000. particularum
æqualium, unde & circumferentiā circuli a b c inter duos terminos notos cō-
præhendi oportebit. Nam quando semidiameter a d est 497. particulæ, semi
circumferentia circuli a b c per 13. præambulum inter hos duos terminos con
stituitur 1561. & 1562. quare & per 11. præambulum dum semidiameter a d
60000. particulas æquales habuerit, semicircumferentia circuli a b c inter hos
duos continebitur, 188450. & 188572. atq̃ idcirco per 8. præambulū tota circū
ferentia circuli a b c inter duplos dictorum terminotum reperietur, scilicet,
376900. & 377144. cumq̃ secundū mentē inuentoris, ambitus trianguli æqui-
lateri inscripti circulo habenti semidiametrū d g, æqualis sit circumferentiæ
circuli a b c, erit & dictus ambitus inter commemoratos terminos. sed ambi-
tus ille triplus est lateri ipsius trianguli; quare & per 8. præambulū latus dicti
trianguli inter duos terminos notos compræhendetur, qui sunt tertiæ partes
dictorū terminorum totius ambitus trianguli. latus itaq̃ trianguli continebit̃
inter hos terminos 125633. & 125715. Latus autē trianguli æquilateri circulo
inscripti, potentialiter triplat semidiametrū eiusdem circuli. Vnde & per 8. præ
ambulū linea d g semidiameter scilicet circuli, cui inscribi intelligit̃ dictus tri-
angulus, inter duos notos claudetur terminos. Nā latere ipsius trianguli exi-
stente inter duos terminos notos, scilicet 125633. & 125715. per 5. præambu-
lum, quadratū eius duobus terminis notis concludet̃, qui sunt 15783650689,
& 15804261225. sed quadratū lateris dicti trianguli ad quadratum semidiame
tri d g proportionem habet triplam. quare per 8. præambulum, quadratū d g
inter duos notos iacebit terminos, qui sunt tertiæ partes prædictorū termino-
rum. quadratū ergo d g erit inter hos terminos 5261216896. & 5268087075.
unde & per 7. præambulū ipsa linea d g inter duos notos reperietur terminos
qui sunt 72534. & 72582. habebat autem d c æqualis ipsi a d. 60000. æqua-
les particulas; quare per 2. præambulum residua c g inter duos notos cōtine-
bitur terminos istos 12534, & 12582. Sunt autem duo trianguli a d c, & e a c
æquianguli. nam angulus c communis duobus dictis triangulis per quintam
primi elementorum, æquatur utriq̃ angulorum d a c & a e c. Duo igitur tri
anguli æquicrures a d c & a e c binos angulos supra bases suas habēt æqua-
les. quare per 32. primi tertius reliquus unius tertio reliquo alterius æquabitur.
& ideo per quartam sexti proportio d c ad a c siue e g æqualem ei est ut a c
siue e g ad e c. sed e g maior est ipsa e c, quare & d c maior est linea e g,

ablata

ablata igitur communi e c relinquetur d e maior ipsa c g. abscindatur itaq; ex ea e n æqualis c g, ita ut tota c n fiat æqualis ipsi e g: erit ergo proportio d c ad c n sicut c n ad e c, totius ad totam, sicut abscisæ ad abscisam, & ideo residuæ d c ad residuam n e, sicut totius d c ad totam c n: quare per 15. sexti, quod continetur sub d c & n e æquabit ei quod sub d n & n c. quod autē sub d c & n e continetur, inter duos terminos notos habetur per 3. præambulū. nam d c per se nota est, & n e æqualis ipsi e g inter duos terminos notos compræhendebatur. quare & quod sub d n & n c, compræhendetur inter duos terminos notos, qui sunt 752040000. & 754920000. Quod autem sub d n & n c continetũ, cum quadrato dimidiæ differentiæ linearū d n & n e, per quintam secundi, æquatur quadrato medietatis d c. cumq; quadratum medietatis d c sit notum, scilicet 900000000, erit per 2. præambulum, quadratū dimidiæ differentiæ linearū d n & n c inter duos terminos notos, qui sunt 145080000. & 147960000. & ideo per 7. præambulum, dimidia differentia linearum d n & n c inter duos notos terminos reperietur, qui sunt 12044. & 12164. Hæc autē dimidia differentia sublata ex medietate lineæ d c, relinquit lineam d n, & eidem addita, conficit totam lineam n c, quamobrem linea n c continebitur inter hos duos terminos 42044. & 42164. & ideo linea a c æqualis ei inter eosdem reperietur terminos. In hoc autē processu supponitur lineā d n minorem esse linea n c, cuius probationē inferius aperiemus. Producta deinceps linea c m cum ipsa a c angulum rectū continente, per trigesimā tertij, quadratum a m duobus quadratis linearū a c & c m æquipollebit per penultimam primi. cumq; linea a c inter duos terminos notos, atq; idcirco quadratum eius inter duos notos terminos habeatur, sed & quadratum diametri a m per se notum sit, erit per 2. præambulum, quadratū lineæ c m inter duos terminos notos. quadratū autem a c est inter hos 1767697936. & 1777802896. & quadratum a m est 14400000000, quare quadratum c m inter hos reperietur terminos 12622197104. & 12632302064. & ideo per septimū præambulum ipsa linea c m inter duos notos comprehendetur terminos istos 112348. & 112394. Ducantur demum lineæ b m & b c cum ipsa c m claudentes triangulum b m c similem triangulo a d c. Cum enim arcus a c & a b sint æquales, erunt & residui ex semicircumferentijs b m & c m æquales, & ideo cordæ suæ b m & c m æquales. Vterq; autē angulorū a d c & b m c duplus est ad angulum a m c: ille quidem per 19. tertij: iste uero per ultimam sexti elementorum Euclidis, ꝙ arcus b c duplus sit arcui a c, duo igitur anguli a d c & b m c sunt æquales. Cumq; duo trianguli a d c & b m c sint æquicrures, oportebit reliquos eorum binos angulos esse æquales: & ideo triangulos ipsos esse æquiangulos. quare per quartam sexti proportio d a ad a c est ut m c ad b c: & prima quidem harum quatuor proportionaliū linearum per se nota est, reliquæ autem duæ inter terminos notos constituuntur: quare per 10. præambulū linea quoq; b c duobus notis intercipietur terminis, qui sunt 78725. & 78984. Constat itaq; cordam b c maiorem esse semidiametro d c, cum terminus minor eius ipsam semidiametrum d c excedat. sed & quadratum b c minus est necessario duobus quadratis linearū b d & c d: id est duplo quadrati semidiametri b d: cum quadratum maioris termini b c minus sit duplo quadrati semidiametri b d. quare per 42. primi Triangulorum nostrorū angulus b d c acutus habebitur. ducta igitur perpendicularis c h ad lineā b d cadet intra triangulum, quemadmodū ex 30. primi triangulorū concluditur, sed per 45. eiusdē,

excessus

excessus quadratorum b c & c d æquatur ei quod sub differentia casuum b h & h d atque tota ipsa b d continetur. sed excessus quadratorum b c & c d inter duos notos consistit terminos per 2. præambulum, quoniam alterũ quidẽ ipsorũ quadratorum per se notum est; alterum uero inter duos terminos cognitos comprehendit. est enim quadratum c d 3600000000. quadratum autẽ b c inter hos iacet terminos notos 6167925625. & 6238472256. quare per præambulũ 2. differẽtia horũ quadratorũ est inter hos terminos 2597625625. & 2638472256. & inter eosdem erit etiã quod sub differentia casuũ b h & h d ac tota b d continetur. cumque tota b d per se nota sit, erit & per 4. præambulũ differentia casuũ b h & h d inter duos terminos cognitos, qui sunt 43293. & 43975. differentia autem duorum casuũ b h & h d dempta ex tota b d, relinquit duplum casus minoris, scilicet h d: per 2. igitur præambulum, duplũ lineæ h d est inter hos duos 16025. & 16707. quare & per 8. præambulum ipsa h d linea inter hos duos continebit terminos 8012. & 8354. Quadratum insuper h d cum quadrato h c æquipollent quadrato d c per penultimam primi elementorum. quadratum autem h d est inter hos duos 64192144. & 69789316. & quadratum d c per se notum est; quare per 2. præambulum quadratum h c inter duos notos reperiet terminos, qui sunt 3530210684. & 3535807856. atque idcirco per 7. præambulum, ipsa linea h c continebitur inter hos terminos 59415. & 59463. Est autẽ per quartã sexti, proportio d c ad c h sicut d e ad e k perpendicularem ductam ex puncto e ad lineam b d: & prima quidem harum quatuor linearũ proportionalium per se nota est: reliquarũ uero duarum utraque inter duos notos comprehenditur terminos. erat enim c n æqualis ipsi a c inter duos terminos cognitos, scilicet 42044. & 42164. tota autẽ d c erat 60000. & ideo residua d n inter illos duos notos cõcludet 17836. & 17956. Sed & c g siue e n ei æqualis inter hos duos erat 12534. & 12582. quare per primum præambulum tota d e continebitur inter hos terminos 30370. & 30538. Linea uero c h concludebat inter hos 59415 & 59463. quare & per 10. præambulum, quarta dictarum linearum, quæ est e k inter duos terminos notos comprehendetur, scilicet 30073, & 30265. Itẽ proportio c d ad d h est sicut e d ad d k quarta sexti arguente. sed prima harum quatuor linearum proportionalium per se nota est, scilicet 60000. secunda uero, scilicet d h concludebatur inter hos duos 8012. & 8354. tertia denique inter hos duos 30370. & 30538. quare per 10. præambulum linea d k inter duos reperiet notos terminos, qui sunt 4055. & 4252. Ex penultima autẽ primi quadratum e f duobus quadratis linearum e k & k f æquipollet. quadratum autem e f lineæ æqualis ipsi a c, superius inter duos terminos notos continebat: & ipsa linea e k inter duos notos consistit, qua de re etiam quadratum eius inter duos notos comprehendetur, quinto præambulo id edocente: quare & per 2. præambulum, quadratũ lineæ f k duobus terminis notis circũdabit, qui sunt 851727711. & 873417567. unde & per 7. præambulum, ipsa linea f k duos circa se notos accipiet terminos, scilicet 29184. & 29554. Sic utraque duarũ linearum f k & d k inter duos notos habebitur terminos; quare & per primum præambulũ congeries duarũ linearum f k & d k. scilicet tota linea d f inter duos notos constituetur illos 33239. & 33806. Sed linea d g habebatur superius inter hos terminos 72534. & 72582. atque idcirco medietas eius inter hos 36267. & 36291. Linea igitur d f minor existens quam 33806. multo minor erit quam 36267. sed medietas lineæ d g maior est quam 36267. Est itaque linea d f multo minor quam subdupla ad ipsã d g. Dũ

ergo

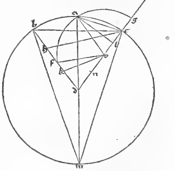
ergo triangulus æquilaterus insctiptus circulo habenti semidiametrũ d g, æquecircũmensuratur circulo a b c. ipsa linea d f minor est q̃ subdupla ad lineam d g: quare nõ poterit stare sententia inuentoris, nisi contradictoria sese compatiantur ueritate. Nam ex dispositione subiecti conceditur (quia supponitur) lineam d f esse subduplam lineæ d g, & deinceps ex argumentatione nostra concedi oportet lineã d f, manente eadem semper dispositione, nõ esse subduplam ad ipsam d g. Ad finẽ igitur laboris maximi perducti sumus, concludentes inuentionem supra recitatã ad uerum quidem accedere, intellectui autem ueritatem ipsam desideranti nequaq̃ satisfacere. Sed dubitabit forsitan quispiam lineam d n minorem esse linea n c, quod tanq̃ certum superius assumpsimus, ita ut punctus n cadat ultra punctum mediæ sectionis lineæ d g uersus punctũ d, quatenus per quintam secundi elementorũ, ratio nostra procedat, ut supra explanauimus. Illud ergo ratificabimus hoc pacto. Ponamus duas lineas d b & d c motibus suis discessisse â puncto a, intantum q̃ corda a c sit latus decagoni æquilateri inscriptibilis circulo a b c: & ponatũ linea a e æqualis ipsi a c: factoq̃ puncto e centro super eo secundum quantitatẽ e a describatur circulus, cuius circumferentia secet lineam quidẽ d b in puncto f, lineam autẽ d c continuatam in puncto g, quemadmodum etiã superius disponebatur: ducatur demum linea e f. Cum igitur secundum argumentationẽ superius factã, duo trianguli a d c & a e c sint æquianguli: ita q̃ angulus a d c sit æqualis angulo e a c, & reliqui reliquis: angulus autẽ a d c, p ultimã sexti elementorũ, sit decima pars q̃tuor rectorũ, atq̃ idcirco quinta ps duorũ rectorũ: erit & angulus e a c quinta pars duorũ rectorũ. sed angulus d a c est duæ quintæ duorũ rectorũ, ppterea q̃ duo anguli d a c & d c a æquales inuicẽ ualẽt q̃tuor quintas duorũ rectorũ: erit igitũ angulus d a e æq̃lis angulo e a c, qui æq̃lis erat angulo a d c. sic duo anguli d a e & e d a sunt æquales, & ideo per sextã primi, duæ lineæ a e & e d æquales habebuntur. posita demũ e n æquali ipsi c g, ita ut tota c n sit æqualis lineæ e g, atq̃ idcirco ipsi a c siue a e, erit d n residua æqualis ipsi e c. sed propter similitudinẽ triangulorũ a d c & a e c proportio d c ad a c sicut a c ad e c. & ideo proportio d c ad c n sicut c n ad n d. Est itaq̃ linea d c diuisa in puncto n, secundũ proportionem habẽtem medium & duo extrema, cuius maior portio est c n. In tali igitũ situ linearũ d b & d c punctus n cadit ultra punctũ mediæ sectionis d c uersus centrũ circuli. Amplius cũ duo latera e d & d f triãguli d e f sint æqualia, erunt p 5. primi duo anguli e d f & e f d æquales. sed angulus e d f est duæ quintæ duorum rectorum, quia duplus ad angulum a d c, qui est quinta duorum rectorũ: quare & angulus e f d est quintæ duorum rectorum, & ideo angulus d e f una quinta duorum rectorum. igitur triangulus d c f triangulo e a c est æquilaterus & æquiangulus: erit itaq̃ d f æqualis ipsi c e, & ideo etiã æqualis lineæ d n: sed d n minor est q̃ medietas lineæ d c, cum ipsa d n minor sit linea n c: multo igitũ minor erit d n & ideo etiã d f q̃ medietas lineæ d g. quamobrẽm oportet duas semidiametros d b & d c amplius elongari â puncto a, ad hoc ut d f fiat æqualis medietati d g: quanto autem magis elongantur dictæ semidiametri à puncto a, tanto minor fit linea d n, ponendo semper c n æqualem ipsi a c siue e g: dum autem a c est latus decagoni æquilateri circulo a b c inscriptibilis, linea d n ostẽsa est minor medietate d c, quare multo minor erit in maiore elongatione semidiametrorũ d b & d c â puncto a. Constat itaq̃ punctum n cadere ultra punctũ mediæ sectionis d c uer

ſus punctum d, dum d f eſt ſubdupla ipſi d g. quod erat explanandũ. Nemo inſuper ſuſpicari debet, ꝙ circumferentia circuli ſuper e centro deſcripti, ſecet lineam d b in alio puncto ꝗ̃ f. concluſimus namq́ ſuperius lineam e f ſiue a c inter hos duos terminos 42044. & 42164. lineam autem d e inter hos 30370. 30538. Linea ergo e f, ſcilicet ſemidiameter circuli ſuper e centro deſcripti, maior eſt ipſa e d linea. quare nullus punctus lineæ d b eſt in circumferentia circuli ſuper e centro deſcripti, præter punctum f. Ad ſummã ergo concluditur ꝙ, ſtante ſupra memorata diſpoſitione, triangulus æquilaterus inſcriptus circulo habenti ſemidiametrum d g, non habet æqualem ambitum circulo a b c. Nam ſi ita eſſet, ſequeretur lineam d f minorem eſſe ꝗ̃ ſubduplã lineæ d g, quæ tamen ſupponitur ſubdupla eidem: quod implicat contradictionem. Huiuſmodi examen accomodari etiam poſſet ad quadratum, ad pentagonum, ac alias figuras æquilateras circulis inſcriptibiles; in triangulo tamẽ æquilatero facilius erat propter datam proportionem rationalem perpendicularium, quæ ex centro circuli ad latera triangulorum æquilaterorũ, inſcripti uidelicet & circũſcripti, ꝑducunt̃: in reliquis aũt figuris æquilateris ꝓportiones huiuſmodi perpendiculariũ irrationales ſunt, inter binas tñ datas rationales ꝓportiones oẽs cõtinent̃, q̃d quidẽ ꝓ examine fiẽdo ſufficeret. Sed poſt ꝗ̃ in triangulo æquilatero nõ proceſſit inuẽtio cõmemorata, ueriſile eſt ꝙ neq́ in cæteris figuris locũ habeat. Tanto igit̃ labori noſtro fructus reſpondebit ille, ꝙ poſteri ſupra recitatam concluſionem lecturi, non ſuſpenſum habeant animũ, qualẽ nos diu geſſimus, priuſq́ ſatis negociũ iſtud exploraremus. ingẽtesq́ nõ iniuria nobis agent gratias, qui ueritatẽ tantopere & ſcrutati ſumus & poſthac tuebimur. Neq́ fruſtra uigilias noſtras huic exercitio nos impendiſſe quiſpiã ſuſurrare auſit, quamuis nihil aſtruxiſſe uideamur, quippe qui neq́ curuam rectificare docuimus lineam, neq́ æqualem circulo quadratam aream reddiderimus. ſolent enim nonnunq́ opiniones erroneæ gratius nocere ꝗ̃ ueræ ac firmæ ſententiæ prodeſſe poſſint. Hunc igitur ſcrupulum diuturna meditatione ac magno tandem labore eripuimus. Rationes autem quæ mouere potuerũt inuentorem, nullas inuenio ſcriptas, quibus, ſi quæ eſſent, non iniuria obuiandum eſſet in calce huius orationis: quas nequaq́ Mathematicas, ſed Lullianas potius fuiſſe arbitror: qualeſcunq́ tamen fuerint, efficaciam habere non potuerunt, niſi duo contradictoria ſimul ſtare poſſe aliquis confiteat̃. Satis in hoc negocio luſiſſe uidemur, ad aliam deinceps inuentionem nouiſſimam tranſire licebit, ſi prius uniuerſos hæc noſtra ſcripta lecturos hortabimur, ut pro manſuetudine ſua noſtras ſuſcipiant rationes, non tanq́ detractorias, ſed ueritatis duntaxat monſtratrices. nam ſi alium quempiam laceſſere, aut noſtra oſtentare facta cupidi fuiſſemus, multo plures, ꝗ̃ fecimus, rationes adduxiſſemus, more oratorum, qui ſuum ꝗ̃ plurimis argumentis confirmant propoſitum, quãuis non æque fortibus. Vnica igitur ratione uſi ſumus, ut humiliter ac ſincere ueritatem inueſtigaſſe potius credamur, ꝗ̃ arroganter alijs detraxiſſe.

Finis.

πλεονεκτούμενα τῶ τοῦ κύκλου τετραγωνισμοῦ κατὰ Νικόλεων τὸν κυσαῖον διὰ σχημάτων εὐθυγράμμων καὶ ἰσοπλεύρων τῶν γεγραμμένων ἐντὸς καὶ ἐκτὸς τοῦ κύκλου δοθέντος.

Dispositio. Si circulus a b m c super centro d descriptus, cuius diameter a m: duæ autē semidiametri eius d b & d c incœperit simul moueri ab a puncto recedendo, hæc quidē uersus dextrā, illa uero uersus sinistram: motus earum sit æque uelox. Iamq; traductæ sint ad talē situm, ut ducta corda a c & linea a e sibi æquali, super pūcto e facto centro secundum quantitatem e a describatur circulus, cuius circumferētia secet semidiametrum quidē d b in puncto f: d c autē continuatam in g, ita ut d f sit subdupla ad d g. Dicitur φ triangulus æquilaterus inscriptus circulo eius semidiameter d g sit isoperimeter circulo a b m c.



60000.
semidiameter d a.

Ponatur arcus a c 36. gra.

18541
18541

37082
corda a c.

35267.
Linea a l.

54 0
complementū arcus a c.

48541.
11459.
Linea l c.

11459.
22918.
Linea e c.

37082.
Linea d e.

37082.
74164.
Linea d d.

72 0
arcus b c.

57063.
Linea c h.

18 0
complementū arcus b c.

18541.
Linea d h.

60000. 57063.
37082.

57063
37082

114126
456504
399441
171189

3 445
2 1 1 6 0 1 | 0166
35266

35267.
Linea e k.

60000. 18541.
37082.

37082
18541

37082
148328
185410
196656
37082

7 3 5
6 8 7 8 3 | 7362
11458

11458.
Linea d k.

37082
37082

74164
296656
2595740
111246

1375074724
quadratum e f.

35267
35267

246869
211602
70534
176335
105801

1243761289
quadratum e k.

1375074724
1243761289

131313435
quadratum f k.

1
23 7 | 1
13148 | 1
12552954 | 4
1313134355 | 5
2222890 | 9
2 2
2

11459.
Linea f k.

Sed quid opus erat tantis? cum d e & e f sint æquales, necesse fuit lineam d k æqualem esse ipsi k f.

11458
11458

22916
Linea d f.

Dum ergo ponitur corda a c, 37082. sit linea d g, 74164. & linea d f, 22916. minor scilicet quam subdupla ipsius d g. quare necessario corda a c maior erit, si d f debet esse medietas de d g.

74164
37082 medietas d g.

22916

14166
37082

51248

37082
22916

14166
Differentia lineæ d f. & medietatis d g.

Sed ponamus arcum a c 54. gra. cuius medietas 27.

27239
27239

54478
corda a c.

36 0
complementũ arcus a c.

35267.
Linea d l

24733
24733

49466
Linea e c.

10534.
Linea d e.

54478.

65012.
Linea d g.

54
54

108

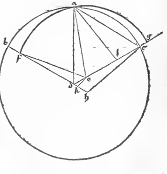
27

57063.
Linea c h.

18 0

18541
Linea d h.

60000. 57063.
10534.



57063
10534

228252
171189
285315
57063

82 |
601118 | 1642
10018 |

10018.
Linea e k.

60000. 18541.
10534.

18541
10534

74164
55623
92705
18541

13 |
195531 | 0894
3255 |

3255.
Linea d k.

54478
54478

435824
381346
217912
217912
272390

2967852484
quadratum e f.

10018
10018

80144
10018
10018

100360324
quadratum e k

2967852484
100360324

2867492160
quadratum f k.

11 8
595395 | 5
3582445126 | 3
2867492160 | 5
1006700 8 | 4
11007 | 8
1

53549.
Linea f k.

3255.

50294.
Linea d f.

65012.

32506.
medietas d g.

50294
32506

17788
Differentia lineæ d f & medietatis d g.

Dum igitur posui cordã a c 37082. linea d f minor fuit medietate d g in 14166. dum uero posui cordam a c 54478. linea d f maior fuit medietate lineæ d g in 17788. Faciam igitur secundum regulam positionis falsæ ad inueniendum propinque, quantam oporteat esse, cordam a c sicut d f fiat medietas d g.

positio 1. positio 2.
37085. 54478.

14166. 17788.
error 1. diminutus. error 2. additus.

37082
17788

296656
296656
259574
259574
37082

659614616

54478
14166

326868
326868
54478
217912
54478

771735348
659614616

1431349964

17788
14166

31954
Summa errorum.

1
32124
43368
286157
393463 | 4
1535786 | 4
2951831188 | 7
14313499649 | 9
31955444 4 | 4
3195555
31999
311
3

44794.
Corda igitur a c uellet esse tanta. Sed examinemus illud.

22397.

22 57
22 57

45 54
Arcus igitur a c uellet esse tantus.

44 6
complementũ arcus a c.

60000.
41755.
Linea d l.

18245
18245

36490

Linea e c.

23510.

Linea d e.

44794.

68304.

Linea d g.

45 54
45 54

91 48

88 12

59970.

Linea c h.

Respice secundam figuram, est enim angulus b d c obtusus.

1 48.

1885.

Linea d h.

60000. 59970.
23510.

59970
23510
599700
29985
17991
11994
1409894700

22541 |
140989 | 4700
23498 |

23498.

Linea e k.

60000. 1885.
23510.

23510
1885
117550
18808
18808
2351

253 |
4431 | 6350
738 |

739.

Linea d k.

44794
44794
179176
403146
313558
179176
179176
2006502436

quadratum e f.

23498
23498
187984
211482
93992
70494
46996
552156004

quadratum e k.

2006502436
552156004
1454346432

quadratum k f.

6
9
44 | 3
126582 | 8
57373987 | 1
1454346432 | 3
6766226 | 6
76 |

38136.

Linea k f.

739.

37397.

Linea d f.

68304.

34152.

Medietas lineæ d g.

3245.

Differentia lineæ d f & medietatis d g.

Faciam iterum secundũ positionem falsam.

37082. 44794.

14166. diminutus. 3245. additus.

37082
3245
185410
148328
74164
111246
120331090

44794
14166
268764
268764
44794
179176
44794
634551804
120331090
754882894

Numerus diuidendus.

14166
3245
17411

Diuisor.

1
15
141
3931
2618457 | 4
5721668 | 3
378449548 | 3
754882894 | 5
174111111 | 6
1741111
17444
177
1

43357.

Corda igitur a c uellet esse 43357. secundũ hãc regulam positionis falsæ iterum examinabo.

21679.

21 11
21 11

42 22

Tantus ergo uellet esse arcus a c.

47. 38.
complementũ arcus a c.

60000
44331
15669
15669
41338
Linea e c.

28662.
Linea d e.

43357
72019
Linea d g.

42 22
42 22
84 44
arcus b c.

59747.
Linea c h.

Respice primam figurã: est enim angulus b d c acutus.

5 16
complementũ arcus b c.

5507.
Linea d h.

60000. 59747.
28662.

59747
28662
119494
358482
358482
477976
119494

53
8518246 | 8514
28541

28541.
Linea e k.

60000. 5507.
28662.

28662
5507
200634
143310
143310

34
45784 | 1634
2630

2631.
Linea d k.

43357
43357
303499
216785
130071
130071
173428
1879829449
quadratum e f.

28541
28541
28541
114164
142705
228328
57082
814588681
quadratum e k.

1879829449
814588681
1065240768
quadratum f k.

541
26727 | 3
543372 | 2
8418848846 | 6
1065240768 | 3
6645226 | 8
65
6

32638.
Linea f k.

32638
2631
35269
Linea d f.

72019
36009
Medietas lineæ d g.

36009
35269
740
Differentia lineæ d f & medietatis d g.

Faciam secundum regulam positionis falsæ utẽdo duabus positionibus imediate pscriptis, quarum una habet errorem additũ & alia diminutũ.

Positio 1.

44794. error additus. 43357. error diminutus.
3245. 740.

44794
740
1791760
313558
33147560

43357
3245
216785
173428
86714
130071
140693465
33147560
173841025
Diuidendus.

3245
740
3985
Diuisor.

43624. Quotiens.
Tanta uellet esse corda a c.

Nunc iterũ examinabo

illud.

21812.

21 19
21 19

42 38
tãtus uellet esse arc9 a c

47 22
complementũ arcus a e.

60000
44142

15858
15858

31716
Linea c e.

28284.
Linea d e.

43624.

71908.
Linea d g.

42 38
42 38

85 16
arcus b e.

59795.
Linea c h.

4. 44.
complementũ arcus b c.

4951.
Linea d h.

60000. 59795.
28284.

59795
28284

239180
470360
119590
478360
119590

41542
469124 | 1780
28187

28187.
Linea c k.

60000. 4951.
28284.

28284
4951

28284
141420
254556
113136

140034084.

2775
4003 | 4084
2333

2334.
Linea d k.

43624
43624

174496
87248
261744
130872
174496

1903053376
quadratum e f siue a c.

28187
28187

197309
225496
28187
225496
56374

794506969
quadratum e k.

1903053376
794506969

1108546407
quadratum f k.

5
85
6326
1793897 | 3
2293623 81 | 3
11085464 07 | 2
6666458 | 9
6 6 | 4
6

33295.
Línea f k.

2334.

35629.
Linea d f.

71904.

35954.
Medietas d g.

325.
Differentia lineæ d f & medietatis d g.

Iam per regulam positionis falsæ.

Positio 1. Positio 2.
43357. 43624.
Error di. Error di.
740. 325.

43624
740

1744960
305368

32281760

43357
325

216785
86714
130071

14091025

32281760
14091025

18190735
Diuidendus.

740
325

415
Diuisor.

11
313 4
1847 25 | 4
178548 | 3
1819 0735 | 8
415555 | 3
41111 | 3
444

43833.
Tanta uellet esse corda a c.

Examinabo illud.
21916.
21 25
21 25
42 50
Tantus uellet esse arcus a c.
47. 10.
complementũ arcus a c.
60000
44000
16000
16000
32000
Linea c e.
28000.
Linea d e.
43833.
71833.
Linea d g.
42 50
42 50
85 40
Arcus b c.
59828.
Linea c h.
4. 20.
Cõplementũ arcus b c.
4534.
Linea d h.
60000. 59828.
28000.

59828
28000
478624000
119656
48854
867888 | 4000
27919
27919.
Linea c k.
60000. 4534.
28000.

4534
28000
36272000
9068
3
12695 | 2000
2115
2116.
Linea d k.
43833
43833
131499
131499
350664
131499
175332
1921331889
quadratum e f siue a c.
27919
27919
251271
27919
251271
195433
55838
779470561
quadratum e k.
1921331889
779470561
1141861328
quadratum f k.
2
13
1 7896
8614771 | 3
726167812473 | 3
114186133787 | 7
6667458 | 9
67 | 1
6
33791.
Linea f k.
2116.
35907.
Linea d f.

71833.
35916.
Medietas lineæ d g.
9.
Differentia lineæ d f & medietatis lineæ d g.
Iam iterum per regulã positionis falsæ.
Positio 1.
43624. 43833.
error di. error di.
325. 9.
43833
325
219165
87666
131499
14245725
43624
9
392616
14245725
392616
13853109
Diuidendus.
325
9
316
Diuisor.
123
2234
3621 | 4
28784 | 3
14185321 | 8
13883109 | 3
31666666 | 8
31111
333
43839.
Tanta uellet esse corda a c.
Examinabimus illud.
21920.
21. 26.
21. 26.

42. 52.
arcus a c.

47. 8.
complementū arcus a c.

60000
43976

16024
16024

32048
Linea c e.

27952.
Linea d e.

43839.

71791.
Linea d g.

42 52
42 52

85 44
Arcus b c.

59834.
Linea c h.

4. 16.
complementū arcus b c.

4464.
Linea d h.

60000. 59834.
27952.

59834
27952

119668
299170
538506
418838
119668

45423
x6ʒ2479968
27874

27875.
Linea e k.

60000. 4464.
27952.

27952
4464

111808
167712
111808
111808

53
xx4777728
2079

2088.
Linea d k.

27872
27875

139375
195125
223000
195125
55750

777015625
quadratum e k.

43839
43839

394551
131417
350712
131517
175356

1921857921
777015625

1144842296
quadratum f k.

2 5
x338
88873 13
x6549437 3
xx44842x968
8867666 3
87 5
6

33836.
Linea f k.

33836
2080

35916
Linea d f.

71791.

35895 ½.

Medietas lineæ d g.

9.
21.
Differentia linearū d f, & medietatis d g.

Dum igitur ponitur corda a c 43833. linea d f minor est medietate d g in 9. dū uero ponit̃ corda a c 43839. linea d f maior est medietate d g in 21. Vellet itaq; corda a c esse inter hos numeros 43833. & 43839. ad hoc ut d f haberetur medietas d g.

Sed nunc explorabo quantā oporteat esse d g, dum triangulus æquilaterus inscriptus circulo, cuius ipsa est semidiameter, isoperimeter fuerit circulo a b c.

$3\frac{10}{70}$ $3\frac{10}{71}$

220. 223.

70. 71.

220
154

15620. 15610.

4970.

Dum ergo semidiamet̃ circuli est 497. semicircumferētia est inter hos 1562. & 1561.

Sed linea a d est 60000. quēadmodū hucusq; usi sumus. Igitur per præambulum semicircumferentia circuli a b c, erit inter duos.

497. 1561. 1562.
60000.

1561
60000

93660000

```
     1
    422
  112653   |1
  4322 87  |8
  5498 225 |8
 93660000 0|4
 497777777 |5
   499999  |0
    4444
```

188450.

minor terminus semicircumferentiæ a b c.

```
     1562
    60000
 93720000
```

```
       12
   12373   |1
  1438571  |8
  4224922  |8
  54864513 |5
  93720000 |7
  49777777 |1
   499999
    4444
```

188572.

Maior terminus semicircumferentiæ a b c.

Semicircumferentia igitur a b c est inter hos, 188450.& 188572. & ideo tota circumferentia inter duplos eorum.

188450.	188572.
188450.	188572.
376900.	377144.

Inter hos est circumferētia tota a b c.

Quare & ambitus trianguli isoperimetri e est inter eosdē. & ideo per præambulum latus eiusdē trianguli est inter tertias horū terminorum.

```
 11111    12  12
 376900   377144
 125633   125714
 125633   125715
```

Inter hos est latus dicti trianguli.

Quoniā autem latus trianguli æquilateri potentialiť triplat semidiametrum circuli cui inscribitur, erit data proportio quadrati lateris dicti trianguli ad quadratum semidiametri, & ideo per præambulum quadratū semidiametri huiusmodi dabitur.

```
        125633
        125633
        376899
       376899
      753798
     628165
    251266
   125633
   15783650689
```

Minor terminus quadrati lateris trianguli dicti.

```
        125715
        125715
        628575
       125715
      880005
     628575
    251430
   125715
   15804261225
```

Maior terminus quadrati lateris trianguli prædicti.

```
   1       22221
   15783659689
    5261216896
```

Minor terminus quadrati semidiametri circuli, cui inscribiť prædictus triangulus.

```
     22    2    1
   15804261225
    5268087075
```

Maior terminus quadrati semidiametri circuli iam dicti.

```
      113
     1465
   11571  74 |7
   38795598  |2
  5261216896 |5
   14 4 0  6 |3
     4 5 0   |4
    1 4 5
     1 4
       1
```

72534.

Minor terminus semidiametri circuli pdicti, cui inscribitur triangulus æquilaterus.

```
      31
     1128
   132669   5 |7
  3848356 14  |2
  5268087075  |5
  1444501 6   |8
   11445      |1
       1
```

72582.

Maior terminus semidiametri circuli, cui inscribitur dictus triangulus. Sed hæc semidiameť secundū tenorem propositionis æqualis debet esse ipsi lineæ d g, quare necesse est lineā d g esse inter hos terminos, 72534. & 72582. si triangulus æquilaterus inscriptus circulo, cuius ipsa est semidiameter, debet esse isoperimeť circulo a b c.

Conclusimus superius cordā a c esse inter hos terminos 43833. & 43839. quorum primus facit, ut linea d f minor sit medietate d g in 9. partibus. secundus autē facit q̄ maior sit in 21. ita

quòd hic quidem est occasio minoris diminutionis, quàm ille additionis. Si ergo pro minori termino accipiemus 43832. & pro maiori 43838. uerisimiliter tantum minuet d f ex medietate d g propter minorem eorū, quantum addit propter alterum. Seruemus ergo hos dictos terminos, & omnia per demonstrationes lineares inueniamus, non per tabulam sinus. Continuemus autē in figura semidiametrū a d usque ad occursum circumferentiæ in puncto m, ductis tribus cordis b c, b m & c m. Est autē a c medio loco proportionalis inter d c & c e, quadratū ergo a c æquatur ei, quod fit ex d c in c e.

43832. 43838.
Inter hos est a c.

```
       43832
       43832
       87664
     131496
    350656
   131496
  175328
 1921244224
```

quadratum a c.

```
  1
 192124|4224
  32020|
```

32020. 32021
Inter hos est c e, dum a c est 43832.

27980. 27979.
Inter hos est d e.

43832. 43832.

71812. 71811.

Inter hos est d g.

Quadratum autem a m æquatur quadratis linearum a c & c m.

1440000000.
quadratum a m.

1921244224.

12478755776.
quadratum c m.

```
          11
         227     |1
       113888    |1
      3573651 2  |1
  12478755776    |7
    2222234   0  |0
      222234     |8
         2
```

111708. 111709.
Inter hos est c m.

Sed proportio d a ad a c est ut c m ad b c. quare per præambulum b c inter duos notos habebitur.

60000. 43832.
111708. 111709.

```
        43832
       111708
       350656
     306824
    43832
   43832
  43832
  4896385056
```

```
    3    2|
  489638 8|5056
   81606  |
```

81606.
Minor terminus b c.

```
  4896385056
       43832
    3
  489642|8888
   81607|
```

81608.

Minor terminus b c.

81606. 81608.
Inter hos est b c.

```
       81606
       81606
      489636
    489636
   81606
  652848
  6659539236
```

quadratum minoris termini b c.

```
       81608
       81608
      652864
    489648
   81608
  652864
  6659865664
```

quadratum maioris termini b c.

```
6659539236
3600000000
3059539236
```

Minor terminus eius quod fit ex differentia casuum b h & h d in totam b d.

```
6659865664
36
3059865664
```

Maior terminus huiusmodi.

```
       51
   305953|9236
    60992|
```

```
       54
   305986|5664
    50997|
```

50992. 50998.
Inter hos est differentia casuum b h & h d.

9008. 9902.
Inter hos est duplum casus minoris, qui est h d.

4504. 4501.

Inter

Inter hos est casus h d.

Quadratum autem h d cum quadrato c h ualēt quadratū lineæ c d, quare per præambulum c h inter duos notos habebitur.

```
    4504
    4504
   18016
  22520
 18016
20286016
```

quadratum maioris termini h d.

```
    4501
    4501
    4501
   2250
 18004
20259001
```

quadratum minoris termini h d.

```
3600000000
  20286016
3579713984
```

quadratum minoris termini c h.

```
3600000000
  20259001
3579740999
```

quadratum maioris termini c h.

```
      1
     33
    1468          | 5
  1198375         | 9
 35797139848      | 8
   10189666       | 3
    11119         | 0
      1
```

```
      1
     34
    1471          | 5
  1198332         | 9
 3579740999 9     | 8
   10189666       | 3
    11119         | 0
      1
59830.   59831.
```

Inter hos est c h.

Est autem proportio d c ad c h sicut d e ad e k. quare per præambulū e k inter duos notos cōtinebitur.

60000. 59830. 59831. 27979. 27980.

```
     59830
     27979
    538470
   418810
  538470
 418810
119660
 45554 |
167398 | 3570
 27899 |
```

```
     59831
     27980
   4786480
  538459
 418817
119662
 45    1 |
167407   | 1380
 27901   |
27899.   27902.
```

Inter hos est e k.

Item proportio c d ad d h sicut e d ad d k, quare & d k inter duos notos habebitur.

60000. 4501. 4504. 27979. 27980.

```
  27979
   4501
  27979
139895
111916
   55   |
 12593  | 3479
 2098   |
```

```
   4504
  27980
 360320
 40536
31528
9008
12602 | 1920
2100  |
2098.   2101.
```

Inter hos est d k.

Quadratum autem e f æquatur duobus quadratis e k & k f.

```
     27899
     27899
    251091
   251091
  223192
 195293
55798
778354201
```

Quadratus minoris termini e k.

```
     27902
     27902
     55804
  251118
 195314
55800
778521604
```

Quadratus maioris termini e k.

```
1921244224
 778521604
1142722620
```

minor terminus quadrati f k.

```
 1921244224
  778354201
 1142890023
```

maior terminus quadrati f k.

```
        1
    55242      |3
  2639842  4   |3
 11427227627 0 |8
   6667660     |0
      6 7      |4
       6
```

```
      1 4
   55  943     |3
 2634584873    |3
 114289000233  |8
   6667660     |0
      6 7      |6
       6
```

33804. 33807.
Inter hos est f k.

```
33804    33807
 2098     2101
35902    35908
```

Inter hos est d f.

71811. 71812.
inter hos erat d g

35905½. 35906.
Inter hos est medietas d g. nondũ ergo apparet certitudo huius rei, neq; incõueniens aliquod, nã si medietas d g est inter hos 35905½. & 35906. erit necessario etiã inter hos 35902. & 35908. inter quos etiã est ipsa d f.

Huc attende animum.

Aggrediar aliam uiam. In prima facie praecedẽtis cartae columna tertia conclusimus lineam d g esse inter hos terminos 72534. & 72582. cumq; linea d c sit 60000, erit per praeambulum c g inter duos notos.

```
72534    72582
60000    60000
12534    12582
```

Inter hos erit linea c g, cui sit aequalis e n. oportet enim d e maiorẽ esse ipsa c g, nam proportio d c ad e g siue a c, est ut a c siue e g ad e c, sed e g maior est ipsa e c, quare & d c maior est linea e g. ablata communi e c relinquitur d e maior ipsa c g. Cum igitur sit proportio d c ad c n sicut c n ad c e totius ad totã, sicut abscisae ad abscisam: erit residuae d n ad residuam n e sicut totius d c ad totam c n. quare quod sub d n & c n cõtinetur, aequale erit ei quod sub n e & d c. sed quod fit ex n e in d c, est inter duos notos per praeambulum.

```
    12534
    60000
752040000

    12582
    60000
754920000
```

Igitur quod fit ex d n in n c est inter hos duos 752040000. & 754920000.

Sed quod fit ex d n in n c cũ quadrato dimidiae differentiae earum aequatur quadrato medietatis d c. quare per praeambulum quadratum dimidiae differentiae d n & n c inter duos notos habebitur.

```
    30000
900000000
```

Quadratum medietatis d c.

```
900000000
754920000
145080000

900000000
752040000
147960000
```

Quadratum ergo dimidiae differentiae linearũ d n & n c est inter hos. 145080000. & 147960000.

```
       2
       3       |1
     112  6    |2
   12284840    |0
 1458000000    |4
   12244008    |4
      224
```

```
       2
       31
     1924      |1
   131453      |2
   3558441 1   |1
 147960000 0   |6
   2 4 2 2     |3
    2 4 3
     2 4
      2
```

Igitur dimidia differentia linearum d n & n c est inter hos 12044. & 12164.

```
30000.   30000.
42044.   42164.
```

Inter hos est necessario n c linea, cui aequalis est a c.

Quadratum autẽ a c cũ quadrato c m aequipollẽt quadrato diametri a m, quare & per praeambulum quadratum c m, & ideo

& ideo etiam ipsa linea c m inter duos terminos notos concludetur.

42044
42044
168176
168176
84088
168176
1767697936

Minor terminus quadrati a c.

42164
42164
1777802896

Maior terminus quadrati a c.

14400000000
1777802896
12622197104

Minor terminus quadrati c m.

14400000000
1767697936
12632302064

Maior terminus quadrati c m.

1
1324
12969 | 1
1721217 | 1
58894356 | 2
12622197104 | 3
22224468 | 4
22224 | 8
222

1
112
3785 | 1
218976 | 1
18225981 | 2
598118925 | 3
12632302064 | 9
222244678 | 3
22224
2

112348. 112394.
Inter hos est c m.

Est autem proportio d a ad a c sicut c m ad b c propter similitudinē triangulorū, quare & per præambulū b c inter duos notos habebitur.

60000. 42044.
42164.
112348.
112394.

112348
42044
449392
449392
224696
449392

5413
472355 | 9312
78725

112394
42164
449576
674364
112394
224788
449576

5541
473898 | 0616
78983

Hic ostendas angulum b d c esse acutum.

78725. 78984.
Inter hos est b c.

Differētia autē q̄drati b c & q̄drati d c æquatꝰ ei q̄d fit ex b d in differētiā casuum b h & h d.

78725
78725
393625
157450
551075
629800
551075

6197625625
3600000000

1154
2597625 | 5625
43293

78984
78984
315936
631872
710856
631872
552888

6238472256
3600000000

25423
263847 | 2256
43974

60000. 60000.

43293. 43974.
Inter hos est differentia casuum b h & h d.

16707. 16025.

8354. 8012.
Inter hos est linea h d.

Quadratum autem h d cum quadrato h c ualēt quadratū d c. Igitꝰ &c.

8354
8354
33416
41770
25062
66832
69789316

Quadratum maioris termini h d.

8012
8012
16024
8012
64095
64192144

Quadratum minoris termini h d.

3600000000
69789316
3530210684

Quadratum minoris termini c h.

3600000000
64192144
3535807856

Quadratum maioris termini c h.

6
7
111
206 | 5
55784 | 9
1149852559 | 4
3530210684 | 1
10188882 | 5
11118
1

7
18
39
1818 | 5
174664 | 9
1154649212 | 4
3535807856 | 6
10188892 | 2
11118
1

59415. 59463.

Inter hos est linea c h.

Est autem proportio d c ad c h sicut d e ad e k, quare & per præambulũ e k inter duos notos habebitur. Sed prius quærenda est d e.

60000 60000
42164 42044
17836 17956

Inter hos est d n.

12534. 12582.

Inter hos erat e g siue e n.

17836 17956
12534 12582
30370 30538

Inter hos erit d e.

60000. 59415.
59463.

30370.
30538.

59415
30370
4159050
178245
178245

75
180443 | 3550
30073

59463
30538
475704
178389
297315
178389

374
181588 | 1094
30264

30073. 30265.

Inter hos est linea e k.

Item proportio c d ad d h sicut e d ad d k, quare & per præambulũ d k inter duos notos habebitur.

60000. 8012.
8354.

30370.
30538.

30370
8012
60740
3037
24296

74332 | 4440
4055

30538
8354
122152
152690
91614
244304

13 5
25511 | 4452
4251

4055. 4252.

Inter hos erit d k.

Cum autem duo quadrata linearũ e k & f k ualeant quadratũ e f, duæ autem lineæ e f & e k sint datæ inter binos terminos, erit & per præambulũ f k inter duos notos.

42044. 42164.

Inter hos est e f siue a c.

30073. 30265.

Inter hos est e k.

30073
30073
90219
210511
90219
904385329

Quadratum minoris termini e k.

30265
30265
151325
181590
60530
90795
915970225

Quadratum maioris termini e k.

Quadrata autem terminorum lineæ e f siue a c æqualis ei superius habētur.

1767697936
915970225
85[illegible]27711

Minor terminus quadrati f k.

1777802896
904385329
8734175617

Maior terminus quadrati f k.

21	
81	
538	2
14775 15	9
4558 11375	1
881717111	8
458826 36	4
558	

3	
3267	2
137618	9
41116575 8	5
8734178867	5
458810.	3
859	

29184. 29554.

Inter hos erit f k.

Sic utraq; linearũ f k & d k int̃ duos notos habetur terminos, quare per 3. præambulũ cõgeries earum inter duos notos constituetur.

29184	29554
4055	4252
33239	33860

Inter hos erit linea d f.

72534. 72582.

Inter hos erat d g.

36267. 36291.

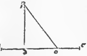
Inter hos est medietas lineæ d g.

Dum igit̃ triangulus inscriptus circulo, cuius semidiameter est d g, isoperimeter est circulo a b c, necesse est lineam d f multo minorem esse medietate lineæ d g, nã linea d f minor est q̃ 33806. quare & minor q̃ 36267. sed medietas lineæ d g est maior q̃ 36267. igitur &c.

Finis laboris maximi. Hoc igitur pacto ad impossibile duceris. Esto secundum intentionem tuam, q̃ duæ lineæ d b & d c æque uelociter motæ recedant à linea d a, sintq; iam in eo situ quem supponis, scilicet q̃ dispositis omnibus, ut conclusio tua sonat, linea d f sit subdupla lineæ d g: & ob hoc sit triangulus æquilaterus inscriptus circulo habenti semidiametrum d g, isoperimeter circulo a b c. Iam sequitur secundum processum meũ resoluendo hoc negocium, q̃ in hoc situ linea d f multo minor sit q̃ medietas lineæ d g. Sic lineam d f æqualẽ esse medietati d g, & eandem non esse æqualẽ medietati d g confiteberis, q̃d est impossibile. Confiteris enim d f esse medietatẽ lineæ d g, id enĩ supponis, sed ꝓpter processum iam factum certissimum, confiteri cogeris, lineã d f non esse æqualem medietati d g. Omnia autẽ in hoc processu meo assumpta sunt certissima, præter hoc unum, quod fortasse dubietatem ingeret intellectui, q̃ scilicet in figuratione quã supponit conclusio, linea d n minor sit q̃ linea n c, ita q̃ punctus n cadat ultra punctum mediæ sectionis d c uersus d. Hoc autẽ sic roborabitur. Ponamus duas lineas d b & d c motibus suis peruenisse ad eum sitũ ubi a c sit latus decagoni inscriptibilis circulo a b c, dispositisq; reliquis omnibus ut res ipsa postulat, erunt duæ lineæ a e & e d æquales. nam duo trianguli a d c & c a e sunt æquianguli, duo enim anguli d a c & d c a per quintã primi æquantur, similiter duo anguli a e c & a c e trianguli a e c æquales sunt: accepto ergo angulo a c e cõmuni duobus triangulis & ad eum cæteris relatis, omnes quatuor dicti anguli inter se æquales habebuntur. Hinc & per 32. primi tertius tertio æquabitur. Est autem angulus a d e decima pars quatuor rectorũ per ultimam sexti, & ideo quinta pars duorũ rectorũ: unde angulus d a c duæ quintæ duorũ rectorũ erit: sed & angulus e a c æqualis angulo a d c quĩta pars est duorũ rectorum, unde reliquus angulus d a e erit quinta pars duorum rectorũ: duo itaq; anguli d a e & e d a æquales sunt, unde & duæ lineæ a e & e d æquales conuincuntur. Cũ deniq; e f linea sit æqualis ipsi a e siue a e, & ideo ipsi d e, erit triangulus d e f duorum æqualium angulorũ e d f & e f d, angulus autem e d f est duæ quintæ duorũ rectorum, duplus enim est ad angulũ e d a, qui erat

k quinta

quinta pars duorũ rectorum: quare angulus d e f erit una quinta duorũ recto rum, & triangulus d e f æquilaterus & æquiangulus triangulo a e c. unde & linea d f æqualis reperietur lineæ c e, sed c e est minor q̃ me⁄ etas lineæ d g. Cum enim propter similitudinem triangulorum a d c & ⁊ . c sit proportio d c ad a c, & ideo ad d e ei æqualem, sicut a c siue d e ad e c, & d e maior est ipsa d e, erit & d e maior linea e c. Sic constat lineam e c minorẽ esse medietate lineæ d c: quare multo minor erit medietate ipsius d g. ergo & d f minor erit medietate lineæ d g. & ideo oportebit duas lineas d b & d c magis elongari ab ipsa d a, ut crescat linea d f. Si autem posuerimus e n æqualẽ ipsi a c siue e g, erit linea d n minor linea n c. & ideo â fortiori minor erit linea d n ipsa n c in maiori elongatione linearum d b & d c ab ipsa d a. quãto enim magis elongantur duæ lineæ d b & d c ab ipsa d a, tanto maior redditur linea e c, & etiam tanto maior linea c n. Quod autem linea d n minor sit linea n c, dum a c est latus decagoni æquilateri circulo a b c inscripti per numeros sic ostendemus. Semidiameter d c est diuisa in punctn e secundũ



proportionem habentem medium & duo extrema, est enim proportio c d ad a c siue d e æqualem ei sicut d e ad e c. Videndum igitur quanta sit d e. Diuidatur d c per medium in puncto o, & â puncto d erigatur orthogonalis d p æqualis ipsi d c ducta o p, cui sit æqualis o q. Iã d q linea erit latus decagoni inscriptibilis circulo cuius semidiameter d c.

60000.
Linea d c.

3600000000
9

4500000000
Quadratum o p.

```
      1  2
  2 1 3 2 7 5 4 7 | 6
 5 6 1 5 8 3 5 8 6 | 7
4 5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 | 0
  1 3 3 4 4 0 1 6 | 8
    1 1 3 3 4     | 2
        1
```

67082. 67083.
Inť hos est o p siue o q.

30000. 30000.

37082. 37083.

Inter hos est d q. scilicet latus decagoni.

60000 60000
37083 37082

22917 22918

Inter hos est e c, cui est æqualis d n. nam duæ c n & d e sunt æquales. quare ablata cõmuni n e relinquitur d n æqualis ipsi e e.

Sic cõstat d n esse minorẽ ipsa n c. multo igitur minor erit quando duæ lineæ d b & d c magis elongabunť â linea a d.

Habemus igitur finem huius rei, quæ iã diu magnum laborem ingessit mihi.

Venetijs die 26. Iunij. Anno 1464. turbata re publica Christiana per hostem suum Mahumetum.

IMmensa su[m]mi dei perfectio aperte nobis demonstratur, dum insatiabilem animæ rationa[li]s cupidinem perpendimus: nam & si continuis additamentis nasci soleant artes humanæ, ad plenitudinem tamen earum nunq̃ pertingere licet. Quo namq; amplius in scientijs procedimus, eo plus (mirabile dictu) restare uidetur ad discendum: fitq; deinceps, quemadmodum uulgo dicit, ut plura dubitent, qui plura didicere. Summus igitur gradus perfectionis nequaq̃ humanitus attingi potest, sed cognitis scibilibus quantiscunq̃, ad alia semper inuenienda tenditur, quod profecto obtigisse arbitror huic uiro celeberrimo ac diligentissimo rerum secretarum inuestigatori: qui post multos modos circũsumerentiam circuli aut eius medietatem rectificandi, areamq; suam quadrandi, sedulo conatus est tradere, quo nam pacto arcui quantolibet æqualis recta designaretur: ac econtra lineæ rectæ quantæcunq̃ propositæ, quæ minor sit circumferentia circuli dati, æqualis ex ipsa circumferentia arcus abscinderet. Ipse tamen, quemadmodum uerba sua sonant, non æqualem circumferentiæ, aut arcui cuilibet rectam assignare pollicetur, sed ei commensurabilem, credẽs fortasse, curuæ circulari æqualem rectam dari non posse, cum, ut uulgus Geometrarum clamat, curui ad rectum non sit proportio, cuius contrarium superius comprobatum est. Pollicetur itaq; curuæ circulari commensurabilem rectã designare ad hunc sensum, ut tot sint pedes, uerbi gratia, recti, in ipsa linea recta designata, quot sunt curui in linea curua proposita, sed reuera fugiendo inconueniens, quod secundum mentem huius philosophi sequeretur, si curuæ circulari

LECTORIBVS.

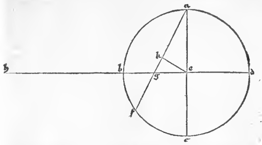
Hactenus progressus est scriptis suis Regiomõtanus, quibus ut nihil dempsimus, sic ne addere q̃dẽ quicq̃ placuit. Imperfectũ igit̃ opus, ac potius uix instituti particulã hanc curauimus & ipsam apponi, quæ sanè tolli commode poterat. Sed fidem nostram præstare uoluimus, quam gratissimam uobis esse par fuerit, ita ut studium laboremq; nostrum.

Νικόλεω τοῦ κουσαίου ἐλαχίστη μέθοδος τοῦ εὑρεῖν εὐθεῖαν ἴσην τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ καὶ οὐ μόνον ὅλῃ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ, ἀλλὰ καὶ παντὶ τμήματι ἥττονι τῆς τοῦ κύκλου ὅλης περιφερείας ἴσην εὑρίσκειν εὐθεῖαν· πειράσομαι οὕτω πρότερον ἀναλῦσαι τοῦτο τὸ πρόβλημα καὶ μετὰ ταῦτα ἑτέρως δὲ αὐτὸ δοκιμάσαι, τοῦ θεοῦ διορθοῦντος.

CIrculum a b g d super centro e descriptum, duæ diametri suæ secent in quatuor quadrantes, extendaturq; d b diameter ultra b absq; fine determinato: demittatur corda ex puncto a, quæ sit a f, secans diametrum prædictã in puncto g, hac lege, ut si recta e h sumatur dupla ad eam cordam a f, e g intercepta centro circuli & puncto g sit quarta pars lineæ e h. Dicitur rectam e h esse æqualem semicircumferentiæ b a d.

Pro huius rei executione, ex centro circuli educo ad cordam a f perpendicularem e k. Esto igitur nunc secundum intentionem atq; assertionem inuentoris, linea e h dupla ad cordam a f, & e g quarta pars lineæ e h: & ob hoc linea e b æqualis semicircumferentiæ b a d, liceat demum ponere semidiame

trum e a 4970.particularum, quamobrem semicircumferentia erit inter hos terminos 15610.&15620.ut ex superioribus iam conclamatum est. Vnde & lineam e h inter eosdem terminos repertum iri constat. Nunc ad numeros descendendum.



15610. 15620.
Inter hos est linea e h.

Est autem a f medietas eius,& ideo per præambulum inter duos notos habebitur.

15610. 15620.

7805. 7810.
Inter hos erit a f.

Ex puncto autem e trianguli a e g rectanguli ad latus recto angulo oppositũ descendit perpendicularis e k. quare per 8. sexti e a erit medio loco proportionalis inter k a & a g,& ideo per 16. sexti & præambulũ linea a g inter duos notos habebitur.

```
     4970
     4970
   347900
   4473
  1988
 24700900
```

Quadratum e a.

```
     1217
     3368
    12913  |6
  6379475  |3
 24700900  |2
  3905555  |5
    39000  |
     399
       3
```

7805. 7810.

3902. 3905.
Inter hos enim oportuit esse a k medietatẽ cordæ a f.

```
        1
       32
    12112
   638834  |6
 24700900  |3
  3902222  |3
    39000  |0
     399
       3
```

6325. 6331.
Inter hos erit a g.

Quare per penultimam primi & præambulum quadratum e g inter duos existet notos.

```
     6325
     6325
    31625
   12650
  18975
 37950
 40005625
```

Quadratum minoris termini a g.

24700900.

15304725.
Minor terminus quadrati e g.

```
     6331
     6331
     6331
   18993
  18993
 37986
 40081561
```

Quadratum maioris termini a g.

24700900.

15380661.

Maior termi[illegible]us quadrati e g.

```
      11
      229     |3
    6996681   |9
   1538047258 |1
     67882    |2
       7
      16
     1374     |3
    697422    |9
   15380661   |2
     67884    |1
       7
```

3912. 3922.

Inter hos erit linea e g.

```
  3
15610    15620.
```

3902½. 3905.

Inter hos est quarta ps lineæ e h.

Linea igitur e g maior est ꝙ 3912. & ideo multo maior ꝙ 3905. sed q̄rta pars lineæ e h siue semicircumferentiæ a b d est minor ꝙ 3905. quare linea e g maior est quarta parte lineæ e h. Propter hypothesim itaq; tuam confiteris (quia ponis) e g quartam partē esse lineæ e h: & propť enunciationem tuam dicendo e h esse æqualē semicircumferentiæ, cogeris concedere lineam e g esse maiorem quarta parte e h, quod implicat contradictionem.

Vel aliter. Quia linea e g ponebať quarta pars ipsius e h, & e h est inť hos duos 15610. & 15620, ipsa e g inter q̄rtas partes dictorum terminorū necessario claudetur, & ideo inter hos 3902. & 3905. sic ipsa minor est ꝙ 3905. sed per syllogismū conclusimus eā esse maiorē ꝙ 3912. unde & maior erit ꝙ 3905. sic maior & minor eodem quod est impossibile.

Aliter ad idem. Quoniam e h est inter hos 15610. & 15620. erit a f inter hos 7805. & 7810. itē e g inter hos 3902. & 3905. unde per penultimam primi & præambulum quadratū a g inter duos notos habebiť.

3902. 3905.

Inter hos erit e g.

```
    3902
    3902
    7804
  35118
 11706
15225604
24700900
39926504
```

Minor terminus quadrati a g.

```
    3905
    3905
   19525
  35145
 11715
15249025
24700900
39949925
```

Maior terminus quadrati a g.

```
      1 3
     13 4
    21988     |6
   333444     |3
  399258042   |1
   122662     |8
    112
      21      |6
    33375     |3
  399499252   |2
   122664     |0
    112
```

9318. 6321.

Inter hos erit a g.

```
4970   4970
3905   3902
1065   1068
```

Inter bos erit b g.

```
4970   4970
3902   3905
8872   8875
```

Inter hos erit g d.

Quod autem fit ex b g in g d, æquatur ei quod ex a g in g f, quare & g f inter duos notos habebitur.

1065. 1068.

8872. 8875.

```
   8872
   1065
  44360
 53232
8872
9448680
```

Minor terminus producti ex b g in g d.

```
   8875
   1068
  71000
 53250
8875
9478500
```

Maior terminus producti ex b g in g d.

 Cumq;

Cũq; a g inter duos notos sit, erit per præambulum & g f inter duos notos.

6318. 6321.

Inter hos erat a g.

```
        5
      8361
      8523
      79941   |1
    31717964  |4
    94458869  |9
    .632111 1 |4
      83712   |
       833
        6
```

```
        11    |1
      3168    |5
    94785000  |0
    83188880  |0
      63111   |
       833
        6
```

1494. 1501.

Inter hos erit g f.

6318. 6321.

7812. 7822.

Inter hos erit a f.

Sed propter hypothesim erat inter hos 7805. & 7810. propter hypothesim ergo minor est q̃ 7810. & ideo minor q̃ 7812. sed per agumẽtationem ex eadẽ hypothesi procedẽte maior ẽ q̃ 7812. sic maior & minor eodẽ quod est impossibile.

Venetijs die 28. Iunij. Anno 1464.

πρασκευῆς γενομένης τῆς ξι ἥρεως τῷ δεσπότου μου.

ταῦτα τὰ γεγραμμένα ἐπι χειρίματα κ̅ ἀνάλισιν γεγόνασι. νῦν δὲ κατ' ἄλλην μέθοδον ἢ ὕστερον τὸ αὐτὸ δοκιμασίους.

Quoniam autem e h ponitur dupla ad a f, & quadrupla ad e g. erit a f dupla ad e g, & ideo a k æqualis ipsi e g.

Pono itaq; a h 1. rem.

Vnus census erit quadratum eius a h.

Ponaturq; ut prius e a 4970.

24700900.

quadratum e a.

Id aufero ex uno censu, scilicet quadrato a g, relinquitur unus census dẽptis inde 24700900. nã aliter exprimi nequit. erit ergo quadratum e g & inde a k unus census dẽptis 24700900.

Est autem e a per 8. sexti medio loco proportionalis inter b a & a g, quare per 21. sexti quadratũ e a erit medio loco proportionale inter quadrata linearum h a & a g. & ideo quadratũ e a in se ductum æquabitur ei quod fit ex quadratis linearum h a & a g, alterius scilicet in alterum. Sed non mireris q̃ quadratũ in quadratum duci iubeatur, cum ductio in lineis dũtaxat locum habeat, hoc enĩ quo pacto & fiat & intelligẽdũ sit alibi ostenditur, facileq; trahitur ex cõmẽto Campani sup ultima decimi elementorum.

```
      24700900
      24700900
   222308 10000
  1729063
  988036
  494018
```

610134460810000

Quadratũ quadrati e a.

1. census

1. censu demptis

24700900.

1. census de censu demptis 24700900. cẽsibus. Hoc fit ex quadrato b a in quadratum a g.

Quare 1. census de censu dẽptis 24700900. censibus, æquatur

610134460810000.

Restaurandoq; diminuta sicut præcipitur in Algebra, erit unus census de cẽsu æq̃lis 24700900 censibus &

610134460810000.

Vtendo igitur censu de censu tamq; censu, agemus per capitulum sextum Algebræ donec reperiemus substantiã rei quæ tamen res est census in hoc proposito; cuius tandẽ radix q̃drata erit numerus lineæ a g.

Cẽsus totus.

nũs
res

24700900.

12350450.

Medietas numeri rerũ.

Hic numerus in se multiplicandus esset, sed cũ sit medietas de 24700900. cuius quadratum superius procreatũ est, erit quadratus numeri rerũ dimidiatarũ quarta pars huiusmõi magni quadrati.

2 2 22 2 2
3232344608210000

152533615202500
quadratus numeri dimi diari rerum.

152533615202500
6101344608 10000

762668076012500

4
617
3 2 2 8
52753 | 2
3 264974 4 | 7
3292472 27 8745 | 6
3437 5 5 98 7 58975 | 1
73 2 63 3 67 3 6 2 2 5 6 6 | 6
4 5 4 5 2 2 2 3 2 2 888 | 4
5 5 5 5 2 2 332 | 4
5 5 5 5 2 | 5
5

27616445	27616446
12350450	12350450
39966895	39966896

Inter hos erit substantia rei, quam hactenus quæsiuimus, sed hæc res in ueritate census erat. Accipio ergo radices quadratas, si quæ sint, horũ numerorum.

1 | 1
2 | 2
2 3 18 | 6 | 2 3 18 | 6
3374454 | 3 | 3374455 | 3
39966895 | 2 | 39966896 | 2
2 2 2 664 | 1 | 2 2 2 664 | 1
2 2 | 2 2
1 | 1

6321. 6322.

Inter hos est a g.

Quare per penultimam primi & præam. e g inter duos notos cõtinebit.

6321
6321
6321
12642
18963
37926
39955041
24700900
15254141

Minor terminus quadrati e g.

6322
6322
12644
12644
18966
37932
39967684
24700900
15266784

Maior terminus quadrati e g.

5 | 3
6849 169 | 9
2 5 2 5 4 1 4 1 | 0
6 7 880 | 5
7

2 | 3
6 3 5 7 1 3 5 | 9
2 5 2 6 6 7 8 4 | 0
6 7 8 8 0 | 7
7

3905. 3908.

Inter hos erit e g.

Igitur si linea a f debet esse dupla ad ipsam e g, quemadmodũ ad hypothesim statim sequitur, necesse erit lineã e g reperiri inter hos duos terminos 3905. & 3908.

Quare & per præambulum linea e h quadrupla eius inter duos notos collocabitur.

3905	3908
4	4
15620	15632

Inter hos erit linea e h.

15610. 15620.

Inter hos erat semicircũferentia b a d.

Sed linea e h maior est q̃ 15620. & semicircumferẽtia minor q̃ 15620. Quare linea e h maior est semicircumferẽtia p̃dicta, quod est contra enunciationẽ inuentoris.

Illud bene consonat supra memoratis. Nã quãdo ponebatur e b æqualis semicircumferentiæ, erat e g maior quarta ipsius e b. Oportuit ergo lineam e h maiorẽ fieri & consequenter a f maiorem, si e g debuit esse quarta ipsius e h. quo facto, e b maior habetur semicircũferẽtia p̃dicta.

Poterit quispiã hæsitare circa id q̃d supius conclusum est, lineã e g contineri int̃ hos duos 3905. & 3908. si debeat esse medietas lineæ a g, & ideo quarta pars ipsius e h. Quamuis enim bene id conclusũ sit, uia tamẽ huius inuẽtionis perpaucis cognita est. Rarissimi enim artem rei & cẽsus, quam Algebrã pleriq; nominant Arabico uocabulo, satis didicerunt. Ideo p̃ media aptiora id cõfirmandũ cẽsui. Quòd aũt nõ possit esse 3908. neq; maior, hac lege declarabimus.

Esto linea e g 3908.

3908
3908
31264
35172
11724
15272464

15272464
24700900
39973364
Quadratum a g.

1
356
2489 | 6
338198 | 3
39973364 | 2
111164 | 2
112

6322. 6323.
Inter hos erit a g.

4970
3908
8878
Linea g d.
1062.
Linea b g.

8878
1062
17756
53268
8878
9428436

7
98
8361
77744 | 1
318818634 | 4
942843609 | 9
632233333 | 1
632222
633
6

2
183
8376
77883 | 1
318866544 | 4
942843609 | 9
632222221 | 1
632222
633
6

1491. 1492.
Inter hos erit g f.

6322. 6323.
7813. 7815.
Inter hos erit a f.

3906½. 3907½.
Int̃ hos erit medietas lineæ a f, scilicet linea a k.

Sed erat linea e g 3908. maior ergo q̃ 3907½. & ideo multo maior medietate lineæ a f. Non potuit igitur linea e g esse 3908. si saltem debuit esse medietas lineæ a f. Nec poterit esse maior q̃ 3908. quãto enim crescit linea e g, tanto decrescit corda a f: multo igitur maior redderetur e g q̃ sit medietas lineæ a f. Non deniq; poterit esse 3905. si saltem debebit esse q̃rta pars cordæ a f. Sit enim e g 3905. erit per penultimam primi quadratũ a g notum.

3905
3905
19525
35145
11715
15249025
Quadratum e g.
24700900.
39949925.
Quadratum a g.

21 | 6
33875 | 3
399499925 | 2
111164 | 0
112

6320. 6321.
Inter hos erit a g.

Quod autem fit ex b g in g d æquatur ei quod fit a g in g f, & ideo per præambulum linea g f inter duos notos habebit: inde quoq; tota corda a f cum eius medietate.

4970
3905
8875
Linea g d.
1065.
Linea b g.

8875
1065
44375
53250
8875
9451875

1
329
6638
7156 | 1
3132248 | 4
945187519 | 9
632111115 | 5
632222
633
6

33
665
7164 | 1
313338 | 4
945187519 | 9
632066605 | 5
632222
633
6

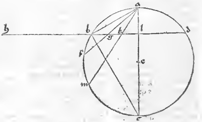
1495: 1946.
Inter hos erit g f.

6320. 6321.
7815. 7817.
Inter hos erit corda a f.

3907½. 3908½.
Inter hos erit medietas cordæ a f, scilicet linea a k.

Cũ itaq; linea e g sit posita

sita 3905. erit ipsa minor quam 3907. sed medietas a f maior est quam 3907. quare linea e g minor erit quam medietas cordæ a f. Non poterit igitur esse 3905. si debebit esse medietas de a f. sed neque minor, nam quanto linea e g decrescit, tanto a f corda fit maior, & eius etiam medietas maior. Prius autē non potuit esse 3908. neque maior, quare necessario linea e g inter hos terminos 3905. & 3908. claudetur, si debebit esse quarta pars cordæ a f. Sed linea e g existente inter dictos terminos, ipsaque existente quarta parte totius e h, quemadmodum supponitur, linea e h necessario maior est semicircumferentia sæpe dicta: quod est contra sententiam eius qui arcum circuli dirigere conabatur. Hæc autem inuentio cæteris plurimis adinuentionibus suis eo abundantior uisa est, quo illæ quidem circumferentiæ totalis aut eius medietati æqualem rectam definire pollicent, hæc uero nō modo totius circumferētiæ, sed & cuiuslibet portionis eius longitudinem in rectum uertere molitur. Quod ut manifestius reddatur, exemplari figuratione utendum censeo.



Circuli a b c d super e cē tro lineati, arcus accipiatur b d quantuscunque, minor tamen semicircū ferentia, quē sub tendat corda sua b d, sagittaque a l protensa ultra centrū, offendat circumferētiam circuli in pūcto c. erit itaque a uertex portionis b a d, Sumatur demum in corda b d punctus k, tantum distans per rectam lineam à uertice portionis a, quātum à b altero termino portiōis. Hunc punctum magisterij uocauit uir ille, quod ab eo tanquam radice totū fermè præsens pendeat negocium. Ducatur insuper ex puncto a corda a f, & corda d b directe continuetur usque ad h, donec h k sit dupla ad cordam a f, & quadrupla ad lineam g k; unde & cordam a f duplam esse lineæ g k consequitur. Asserit inuentor ille lineam rectam h k commensurabilem esse arcui b a d: uidetur uoluisse dicere æqualem. Hoc pacto cuilibet arcui proposito, qui minor est semicircumferentia, æqualem rectam assignare conatur.

Ponamus igitur, exercitij gratia, arcum b a d tertiam partem circumferentiæ; semidiametrum autem e a ut prius 4970. & ideo semicircumferentiam inter hos duos 15610. & 15620. sintque omnia ut disponuntur & asseruntur.

15610	15620
15610	15620
31220	31240

Inter hos erit tota circūferentia.

10406$\frac{2}{3}$.	10413$\frac{1}{3}$.
10406.	10414.

Inter hos erit arcus b a d.

Quærēda est primo corda b d, scilicet latus trianguli æquilateri circulo inscriptibilis, ipsū autem potentialiter triplū ē semidiametro circuli.

4970
4970
347900
4473
1988
24700900

24700900.0
3

74102700

Quadratũ b d siue b e.

```
        165 |8
   145481366|6
   144107000|0
     1671120|8
        117 |
```

8608. 8609.

Inter hos est b d.

4304. 4304.

Inter hos est b l, medietas scilicet cordæ b d.

Nunc quæram pũctum k magisterij.

Ducta corda a b, quæ erit latus exagoni æquilateri circulo proposito inscriptibilis, erit per 12. secundi quadratũ eius a b æquale duobus quadratis a k & k b, cum eo bis quod fit ex b k in k l, & ideo medietas quadrati a b æqualis quadrato b k, cum eo quod fit ex b k in k l; idest ei quod fit ex a k in b l, ponitur enim b k æqualis ipsi k b.

24700900.

12350450.

quod fit ex b k in b l.

```
          233
          358
        35987
       474611 |2
    872358450 |8
     43055555 |6
       430000 |8
          433
            4
```

```
            2
          245
         3512
       359937 |2
      4742214 |8
    823504506 |6
     43044449 |9
       430000
          433
            4
```

2868. 2870.

Inter hos erit b k. & tantum distat punctus magisterij à uertice portionis.

4304 4305
2870 2868

1434 1437

Inter hos erit k l residua ex b l.

Cumq; linea h k asseratur æqualis arcui b a d, erit ipsa inter terminos hos.

10406. 10414.

Inter eosdem enim erat arcus b a d.

2601 ½. 2603 ½.

Inter hos erit quarta ps h k, scilicet ipsa g k.

& ideo inter hos.

2601 2604.

1434. 1437.

4035. 4041.

Inter hos erit g l.

Est autem per 8. sexti a b medio loco proportionalis inter c a & a l.

4970
4970

9940

Linea c a.

```
         1
        15
       5124
       1249   |2
      48022   |4
      69247   |8
   247009000  |5
    99400000
      99444
        999
          9
```

Sed nõ erat opus hac diuisiõe, demõstrari enim potest, semidiametrum e a per æqualia secari in puncto l.

2485.

Linea a l.

atq; idcirco quadratũ a l subquadruplum est quadrato e a.

```
        32 12
   24700900
    6175225
```

Quadratum a l.

```
      4035
      4035
     20175
    12105
   16140
  16281225
```

Quadratum minoris termini g l.

```
      4041
      4041
      4041
    16164
   16164
  16329681
```

Quadratum maioris termini g l.

```
  16281225
   6175225
  22456450
```

Minor terminus quadrati a g.

16329681
6175225

22504906

Quadratum maioris termini a g.

7
18
818
3933 | 4
68645776 | 7
224564840 | 3
89446 | 8
9

18
398
45715 | 4
6918367 | 7
2215049066 | 4
89448 | 3
9

4738. 4744.

Inter hos erit a g.

4304 4305
4041 4035

263 270

Inter illos est b g.

4304 4305
4035 4041

8339 8346

Inter hos est g d.

Quare quod fit ex b g in g d inter duos notos continebitur.

8339
263

25017
50034
16678

2193157

Minor terminus eius quod ex b g in g d.

8346
270

584220
16692

2253420

Maior terminus eius quod ex b g in g d. Illud autem æquatur ei quod sub a g, g f continetur. cumque a g sit inter duos notos, erit & g f inter duos notos &c.

1
24
118
25392
39813
5175194 | 4
2193187 6 | 6
4744442 | 2
4744
47

2
3
268
779
5957
36811
67126 | 4
2253420 | 7
473888 | 5
4733
47

462. 476.

Inter hos est g f.

4738. 4744.

5200. 5220.

Inter hos est corda a f.

2600. 2610.

Inter hos erit medietas cordæ a f.

2601. 2604.

Inter hos erat g k.

Quare & g k inter præscriptos erit terminos, scilicet 2600. & 2610. inter quos erat medietas cordæ a f. Incertum igitur adhuc est, an g k sit æqualis medietati cordæ a f, an maior aut minor ea, quod hactenus scrutabamur. Id autem ex eo uenit, quod terminos nimis distantes assumpsimus, & potissimum quod 4970. particulæ semidiametri e a nimium grossæ sunt.

Nunc subtiliores ponam ueritatis explorandæ gratia.

Ponatur semidiameter e a particularum 497000. & ob hoc semicircumferentia inter hos 1561000. & 1562000.

1561000. 1562000.
1561000. 1562000.

3122000. 3124000.

Inter hos erit tota circumferentia.

1040666. 1041334

Inter hos erit tertia pars circumferentiæ, scilicet arcus b a d.

Quærenda est prius corda b d, latus scilicet trianguli æquilateri circulo inscriptibilis, quod quidem potentialiter triplum est semidiametro circuli.

247009000000.

quadratum semidiametri.

3

741027000000.

Quadratum b d.

32
164437 | 8
356288 | 6
1659947 25 | 0
14548613 68849 | 3
7418027000000 | 2
1672201664 | 9
1177221
17
1

860829.
860830.

Inter hos est corda b d.

1 2

430414.
430415.
Inter hos est b l, medietas scilicet cordæ b d.

Deinde quæram pũctũ k magisterij, ut antea.

247009000000.

123504500000.
quod fit ex b k in b l.

135
7 4 1
8 7 7
5 4 3
7 4 1 8 8 4 1
3 5 4 9 9 5 9 9 | 2
3 5 9 8 1 3 1 6 1 7 | 8
4 7 4 7 7 7 4 1 5 8 | 6
1 7 3 5 0 4 5 0 0 0 0 0 | 9
4 3 0 4 1 5 5 5 5 5 | 4
4 3 0 4 1 1 1 1 1 | 2
4 3 0 4 4 4 4
4 3 0 0 0
4 3 3
4

1
7 2
8 3
9 5 1 5
6 7 7 6
7 4 1 8 1 3 7 5
3 5 4 9 5 9 3 6 9 | 2
3 5 9 8 1 9 7 7 8 1 | 8
4 7 4 7 7 7 8 6 4 4 8 | 6
1 7 3 5 0 4 5 0 0 0 0 0 | 9
4 3 0 4 1 4 4 4 4 4 4 | 4
4 3 0 4 1 1 1 1 1 | 3
4 3 0 4 4 4 4
4 3 0 0 0
4 3 3
4

286942.
286944.
Inter hos erit b k.

430414	430415
286944	286942
143470	143473

Inter hos erit k l.

Cũq; linea h k asseratur æqualis arcui b a d, erit ipsa inter hos terminos.
1040666. 1041334.

Inter eosdem enim erat arcus b a d.

260166. 260334.
Inter hos est quarta ps lineæ h k, sc; linea g k.

260166	260334
143470	143473
403636	403807

Inter hos erit linea g l.

497000.

298500.
Linea a l.

403636
403636
2421816
1210908
2421816
1210908
1614544
162922020496

403807
403807
2826649
3230456
1211421
1615228
163060093249

247009000000.

61752250000.
Quadratũ a l, est enim a l medietas semidiametri e a, & ideo quadratũ eius quarta pars quadrati e a.

162922020496
61752250000
224674270496
Minor terminus quadrati a g.

163060093249
61752250000
224812343249.
Maior terminus quadrati a g.

1
7 7 6
1 8 5 7
9 7 7 3 6 4 | 4
1 1 3 3 8 5 7 5 | 7
3 9 4 9 4 3 4 1 9 | 3
6 8 7 5 5 8 6 8 3 5 2 | 9
7 7 4 6 7 4 7 7 0 4 9 6 | 9
8 4 6 8 8 | 8
9 4 7 9
9 4 7
9 4
9

7
3 9 5 8
1 4 5 6 8 9 | 4
3 3 3 1 9 1 3 8 | 7
6 8 9 5 6 5 3 5 6 | 4
7 7 4 8 1 7 3 4 3 7 4 9 | 1
8 4 8 7 8 | 4
9 4 8 2 | 3
9 4 8
9 4
9

473998. 474144.
Inter hos erit a g.

430414	430415
403807	403636
26607	26779

Inter hos erit b g.

430414	430415
403636	403807
834050	834222

Inter hos erit g d.

834050
26607
5838350
500430
500430
166810
22191568350
minor terminus eius q̃d fit ex b g in g d,

834222
26779
507998
5839554
5839554
5005332
1668444
22339630938

Maior terminus eius q̃d fit ex b g in g d.

2
4
61
3 1726
464937
8812697
322584281 | 4
6337964138 | 6
22191568350 | 8
4741444444 | 0
47414444 | 3
474111
4744
47

2
141
6123
582325
3787281 | 4
34894854 | 7
651371419 | 1
22339630938 | 3
4739988888 | 0
4739999.
473999
4733

46803. 47131.
Inter hos est g f.

473998 474144
46803 47131
520801 521275
Inter hos est corda a f.

$260400\frac{1}{2}$. $260637\frac{1}{2}$.
Int̃ hos est medietas cordæ a f.

260166. 260334.
Inter hos erat linea g k.

Quamobrem linea g k minor existẽs q̃ 260334 minor quoq; erit q̃ ille 260400. Sed medietas cordæ a f maior est q̃ 260400. quare linea g k multo minor est q̃ medietas cordæ a f. Ex hypothesi autẽ linea g k habebatur æqualis ipsi medietati a f. Sic æqualis alicui & minor codẽ q̃d est impossibile. Non est ergo linea recta h k æq̃lis arcui b a d.

Posset præterea simile examen fieri, ponẽdo arcum b a d decimã partem, aut quintã aut quartã totius circumferentiæ partem, sed quoniam labor plurimus est, & ex cõmemoratis finẽ eius consecuti sumus, hic nõ iniuria quiescendum cẽsui.

Venetijs die 29. Iunij. Anno 1464.

τέλος τούτου πράγματος τοῦ δυσκολωτάτου.

Ιωάννης ὁ γερμανὸς τὰ τῆς ἀληθείας κρυπτὰ πανταχοῦ ζητήσας, ταύτην τῶν ἀριθμῶν διάλεξιν ἐποίησε.

ERRATA RECOGNITI OPERIS.

Pagina 6.linea 5.lege diuideretur.Ibidem linea 36.lege dictarum pro differentiarum.Pagina 7.lin:15.lege φ si semidiameter. Pagina 11.lin:5.pro puncto lege puta.Ibidem li:22.diameter.Pagi:12.in calce lege releuare.Pagi:13.li:15.quadrate.Pagi:14.li:41.lege Probatur.Lin:44.lege & hoc probat prima suppositio.Li:45.lege maiorem.Pag:15.li:16.lege orthogonalis. Lin:23.pro ac lege aut. Pagi:22.lin:38.lege licuit.Pag:33.lin:38.lege numeros.Pagi:34.lin:35.lege erunt. Pag:40.li:21.pro magis lege maius.Pagina:41.lin:14.lege sunt.Pag:45.columna 2.lin:7.pro e t lege e l.Eadem pag:colũ:3.lin:11.lege Similiter.Pag:46.col:2.lin:12.lege prius computatis. Ibidem col:3.lin:5.in fine pro o pone 9.Pag:47.col3.li:21.lege 3514.Pag:50.li:12.lege linea t r inter hos duos. Pag:53.lin:23.lege superant. Pag 54.col:1.lin: 16. pro $3\frac{10}{17}$ $3\frac{1}{2}$ lege $3\frac{7}{17}$ $3\frac{10}{77}$.Ibidem lin:penultima pro 347009.lege 247009.Lin:39.lege circulo a b g dato,delendo d.Pag 64.lin:7.pro 6167925625.lege 6197625625.Pagina 67.col:3.lin:7.ab infra scandendo pro 196656 lege 296656.Pag:68.col:1.lin:6. dele o in primo loco.Ibidem lin:5.ascendendo lege fit.Ibidem col:3.lin:16 p 27.lege 72.Pag:69.col:2.li:12.ascẽdendo pro 37085.pone 37082. Pagina 72.col:1.lin:11.ascendendo pro 470360.pone 478360. Ibidẽ col:3.lin:10.ascendendo pro 3134.pone 3234.Pag:74.col:2.lin:9.pro 2088.pone 2080.Lin:11.pro 27872.pone 27875.Lin:23.pro 131417.pone 131517.Pag:76.col 3.li:ascendendo 12.pro 60992.lege 50992. Pagina:77:col:3.lin:19.ascẽdẽdo pro 167298.lege 167398. Lin:14.ascendẽdo pro 538459.pone 538479.Ibidẽ col:3.lin:9.ascẽ:p 55800.pone 55804.Pag.79.col:3 li:20.,p 43974.pone 43975.Pag.81.col:1.lin:12 ascen:pro 33860.pone 33806.Pag:88.col.2.li.penult.lege fit ex a g.Pag.90.col.1.li.30.lege b k in b l,& seq.lege a k æqualis.

EXCVDEBATVR NORIMBERGAE PER
IOH. PETREIVM ANNO
M. D. XXXIII.
MENSE AVGVSTO.